

EL FENÓMENO DE LA DESARTICULACIÓN ENTRE LOS ENFOQUES SINTÉTICO Y ANALÍTICO EN ELIPSES: UN ESTUDIO DE CASO

Mario Di Blasi Regner¹ y Mabel Rodríguez²

mario.diblas@gmail.com – mrodri@ungs.edu.ar

¹ Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Gral. Pacheco

² Universidad Nacional de General Sarmiento

Resumen

Presentamos parte de los resultados de la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI), constructo teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2007), que fue diseñada en el marco de una investigación sobre el fenómeno de la desarticulación de los enfoques sintético y analítico en Geometría. Fue implementada en un curso de Álgebra y Geometría Analítica de primer año de carreras de Ingeniería en la Universidad Tecnológica Nacional, Regional Pacheco. El trabajo permitió al estudiante poner de manifiesto la insuficiencia de las técnicas sintéticas y la necesidad de apelar a las analíticas. La incorporación de un asistente geométrico dinámico, GeoGebra, potenció el estudio. La AEI promovió una actitud investigativa por parte de los estudiantes indispensable para la reconstrucción de conocimiento matemático con sentido, un claro objetivo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Palabras clave: Geometría Sintética; Geometría Analítica; Desarticulación.

The phenomenon of disarticulation between the synthetic and analytical approaches in ellipses: a case study

Abstract

We present a part of the results of an implementation of an Activity of Study and Research (ASR), theoretical construct of the Anthropological Theory of the Didactics (Chevallard, 2007) that was designed as part of a research about the phenomenon of disarticulation between synthetic and analytic geometry. It was applied in a course of Algebra and Analytic Geometry in the first year of engineering carriers at National Technological University, Regional Pacheco. This study allowed students to recognize the insufficiency of synthetic techniques and the necessity of taking into account analytic ones. By offering a dynamic geometry software, GeoGebra, it was strengthened the study. The ASR promoted a research attitude in students, necessary for the reconstruction of mathematical knowledge with sense, a clear aim of the Anthropological Theory of the Didactic.

Keywords: Synthetic Geometry; Analytic Geometry; Disarticulation.

Le phénomène de la désarticulation entre les approches de synthèse et d'analyse en ellipses : une étude de cas

Résumé

Nous présentons quelques résultats de la mise en œuvre d'une Activité d'Étude et Recherche (AER), construction théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2007), qui a été conçue dans le cadre d'une enquête sur le phénomène de la désarticulation des approches synthétiques et analytiques en géométrie. Elle a été mise en œuvre dans un cours d'algèbre et géométrie analytique de la première année des carrières d'ingénierie à l'Université Technologique Nationale, Pacheco Régional. Le travail a permis à l'élève de démontrer l'insuffisance des

techniques de synthèse et de la nécessité de faire appel à l'analyse. L'incorporation d'un assistant géométrique dynamique, GeoGebra, a renforcé l'étude. L'attitude de recherche promue par l'AER a été indispensable pour la reconstruction du sens de la connaissance mathématique, un objectif clair de la Théorie Anthropologique du Didactique.

Mots clés : Géométrie synthétique ; Géométrie analytique ; Désarticulation.

O fenômeno da desarticulação entre as abordagens sintéticas e analíticas em elipses: um estudo de caso

Resumo

Apresentamos os resultados parciais da implementação de uma Atividade de Estudo e Investigação (AEI), construído teórico da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 2007), que foi construído como parte de uma investigação sobre o fenômeno didático da desarticulação das abordagens sintéticas e analíticas em geometria. Foi implementado no decorrer da disciplina de Álgebra e Geometria Analítica em uma turma de primeiro ano do curso de engenharia na Universidade Tecnológica Nacional, Regional Pacheco. O trabalho permitiu ao aluno demonstrar a insuficiência das técnicas de sintéticas e da necessidade de recorrer para o uso de técnicas analíticas. A incorporação de um software de geometria dinâmica, GeoGebra, potencializou o estudo. A AEI proporcionou uma atitude investigativa indispensável para a reconstrução do sentido do conhecimento matemático, um objetivo claro da Teoria Antropológica do Didático.

Palavras-chave: Geometria sintética; Geometria analítica; Desarticulação.

1. INTRODUCCIÓN

La problemática de la enseñanza de la Geometría, y en particular de la articulación entre la Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA), ha sido considerada en los últimos años como tema de interés en un número importante de investigaciones en Educación Matemática (Gascón, 2002a y 2002b; Acosta Gempeler, 2004; Santos Trigo, Espinosa-Pérez & Reyes-Rodríguez, 2008; Bernat, 2011 entre otros).

Algunos resultados ponen en evidencia que un objeto matemático puede ser aprendido desde el punto de vista sintético, desde el punto de vista analítico y el estudiante podría percibir esos conocimientos aislados entre sí. No sólo podría no advertir que son enfoques de un mismo objeto matemático, sino no reconocer las limitaciones y potencialidades de cada una de esas aproximaciones, perdiéndose así el sentido del conocimiento.

En la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco, en las clases usuales de Álgebra y Geometría Analítica, nuestras experiencias sumadas a los resultados de aprendizaje alcanzados por los estudiantes ratifican esta dificultad. Las cónicas, y la elipse en particular, son un contenido que se ha estado trabajando con los dos enfoques y los docentes involucrados aún perciben cierto aislamiento entre los mismos y consideran que los estudiantes no podrían tomar decisiones de cuándo utilizar uno u otro enfoque ni tampoco explicar las razones de su elección.

2. MARCO TEÓRICO

La Teoría Antropológica de lo Didático (TAD) (Chevallard, 2007) nos brindó los elementos teóricos para abordar el problema de recuperar la razón de ser de la GA.

El constructo que utilizamos en nuestra investigación es el de *Actividad de Estudio e Investigación* (AEI) que es una organización didáctica mediante la cual los estudiantes bajo la dirección del profesor se introducen, a partir de una cuestión generatriz (CG) Q_0 , en el estudio y la reconstrucción de una *organización matemática local* (OML) conocida en la institución (Otero, Fanaro y Corica, 2013).

En la AEI, a diferencia de lo que sucede en un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) las actividades que se desarrollarán en el proceso de estudio están seleccionadas de antemano y las cuestiones son introducidas en el medio por el profesor. En una AEI tenemos como meta enseñar algo matemático previamente establecido.

El estudio de Q_0 debe conducir a la producción de una respuesta que contenga los componentes principales de la OML inicial (para ampliar la noción ver por ejemplo Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

En este trabajo presentamos resultados del diseño e implementación de una AEI, un encuentro arreglado con una OML, que intenta favorecer, en los estudiantes, la articulación entre GS y GA para elipses de modo que quede de manifiesto la razón de ser de la GA.

Momentos y funciones didácticas

Desde la mirada de la TAD, la forma en la que se gestionan los procesos de estudio, la Organización Didáctica (OD), puede describirse mediante la noción de *momentos*, fases que deben tenerse en consideración con la finalidad de favorecer el aprendizaje. Cada uno de ellos puede aparecer una o más veces en el desarrollo de una actividad y no hay un orden predeterminado en el que deban hacerlo salvo el del Primer Encuentro con el que necesariamente comienza el proceso.

OD1. Momento del primer encuentro.

OD2. Momentos exploratorios.

OD3. Momento del trabajo de la técnica. Provoca un desarrollo progresivo de la técnica.

OD4. Debe existir un Momento Tecnológico - Teórico de justificación de las técnicas.

OD5. Momento de institucionalización. Es necesario precisar qué es “exactamente” la OM reconstruida.

OD6. Momento de la evaluación. Se valora la calidad de los componentes de la OML construida

Durante la etapa de diseño de la AEI (cuestiones, actividades, medias, etc.) se buscó promover en los estudiantes la curiosidad sobre el funcionamiento de las técnicas y la necesidad de explicitar las tecnologías utilizadas para su justificación promoviendo la reflexión, la explicación de por qué funciona la técnica utilizada en la construcción de una respuesta a la pregunta planteada, la evaluación de su dominio, la validación de resultados, etc.

Es importante destacar que la reconstrucción de una OML en el nivel universitario demanda importantes modificaciones respecto de la distribución de las responsabilidades entre el profesor y los estudiantes (*topogénesis*), la administración del tiempo durante el proceso de estudio respecto del establecido en la institución (*cronogénesis*) y la constitución y gestión del medio didáctico (*mesogénesis*) (Chevallard, 2009).

Indicadores de completitud relativa

Para valorar el grado de completitud de la OML reconstruida, que es uno de nuestros objetivos como se verá más adelante, se utilizaron los siguientes indicadores de completitud relativa (Fonseca, Casas, Bosch y Gascón, 2009).

OML1. Deben aparecer tipos de tareas asociados al “cuestionamiento tecnológico”, esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas.

OML2. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas.

OML3. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática.

OML4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”.

OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.

OML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”.

OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

OML8. Debe existir la posibilidad de perturbar la situación inicial.

Modelización matemática

La TAD propone una interpretación del proceso de modelización matemática que puede aplicarse a todo tipo de sistemas (intramatemáticos o extramatemáticos). Entiende que todo proceso de modelización matemática, aun cuando el sistema inicial sea extra-matemático, finalmente incluye etapas de modelización intramatemática (Serrano, Bosch y Gascón, 2010).

Para la TAD la modelización matemática es un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar pues la entiende como un proceso de construcción y reconstrucción de organizaciones matemáticas de complejidad y completitud crecientes.

La modelización no se entiende como un aspecto de las matemáticas, sino que se afirma que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización (Oliveira Lucas, 2015).

Finalmente podemos decir que la TAD, propone reformular los procesos de modelización como procesos de construcción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad y completitud relativa crecientes para responder cuestiones matemáticas o extra-matemáticas (Oliveira Lucas, 2015).

Ruiz Munzón (2010) considera tres niveles de modelización. En el *tercer nivel de modelización* de un sistema el modelo se expresa mediante *familias de funciones de dos o más variables* y las correspondientes *fórmulas asociadas*.

En este nivel el rol de los “parámetros” y de las “variables” es intercambiable y se estudia cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre la variación de una función.

3. METODOLOGÍA

3.1. Objetivos y problema de investigación

La investigación es de tipo cualitativa, descriptiva y exploratoria.

Algunos de nuestros objetivos fueron:

- Caracterizar un proceso de enseñanza por investigación, articulado alrededor de momentos didácticos, en el primer año de la carrera de Ingeniería Automotriz de la UTN – FRGP.
- Describir la reconstrucción y articulación de OM puntuales de la Geometría Sintética y la Geometría Analítica en una OM local relativamente completa.

Problema docente

¿Cómo lograr que los conocimientos matemáticos de la Geometría Sintética y la Analítica relacionados con elipse

no se presenten desarticulados en un curso de Álgebra y Geometría Analítica de primer año de una carrera de Ingeniería?

Fenómeno didáctico

La desarticulación entre la Geometría Sintética y la Analítica.

Problema de investigación didáctica

¿Qué tipo de Organización Didáctica posibilita que la insuficiencia de las técnicas de la Geometría Sintética aparezca como la razón de ser de la Geometría Analítica (*en elipse*)?

Frente a la pregunta ¿por qué enseño elipse en la formación de futuros ingenieros?, y a la reflexión resultante, conjeturamos que la comprensión y articulación de las características y descripciones sintética y analítica de la elipse podrían permitirnos enfrentar dos desarticulaciones: una intramatemática y otra extramatemática. La primera, la existente entre la Geometría Sintética y la Geometría Analítica en el primer año de la Universidad y la segunda, la que existe entre la Matemática y la Formación de Especialidad en la Institución en la que trabajamos.

Un análisis a priori de las situaciones que formarían parte de la AEI que presentamos en este trabajo y una prueba piloto de la misma, realizada con otro grupo de alumnos en 2014, nos permitió considerar que el dispositivo didáctico diseñado permitía alcanzar nuestros objetivos.

En la implementación participaron 32 alumnos del primer año de la carrera de Ingeniería Automotriz que se organizaron en grupos voluntarios y permanentes. El proceso de estudio se desarrolló entre el 15 de octubre y el 19 de noviembre del año 2015. En ese período los estudiantes trabajaron en pequeños grupos y en forma individual en 6 encuentros de 4 horas reloj cada uno. Las actividades se desarrollaron en el aula habitual de la materia y los estudiantes disponían de una notebook con GeoGebra instalado, al menos, cada dos alumnos.

Los estudiantes y el investigador dispusieron de un foro para interactuar, compartir sus avances y diferentes materiales en el aula virtual de la materia.

Los estudiantes se comprometieron a asistir a las clases y participar en el foro y fueron claramente informados de la forma en la que iban a ser evaluados (de una forma no tradicional) que no los perjudicaría.

En cada sesión, obtuvimos los protocolos de los estudiantes al finalizar la misma. Todos se digitalizaron. Además, se tomaron registros de audio, fotos, video y notas de campo. Colaboraron con estas tareas voluntariamente dos docentes auxiliares de la materia.

Para la elaboración de las conclusiones analizamos las producciones de los estudiantes, las grabaciones de audio y video generales y las de las entrevistas que realizamos en conjunto con las minutas y los elementos teóricos de la TAD, especialmente analizamos la completitud relativa

siguiendo los indicadores descriptos en Fonseca *et al.* (2009).

3.2. Modelos praxeológicos

La TAD entiende como Modelo Praxeológico de Referencia (en adelante MPR), a la manera de organizar el saber matemático antes de transformarlo en saber a enseñar y constituye una herramienta para analizar las organizaciones matemáticas.

A continuación, se enuncian los tipos y subtipos de tareas y las técnicas que constituyen el Modelo Praxeológico Dominante (MPD) y el Modelo Praxeológico de Referencia (MPR).

Los tipos de tareas T_1^1 a T_1^4 constituyen el MPD. En cambio, si consideramos todos los tipos de tareas desde T_1^1 hasta T_2^4 , con sus tres subtipos de tareas, caracterizan el MPR en primera persona (es decir cómo lo resolveríamos nosotros desde el rol de expertos).

El tipo de tarea T_2^4 no está presente actualmente en los programas de la materia ni en los libros que habitualmente se incluyen en la bibliografía. Lo agregamos a los que forman parte del MPD porque consideramos que el trabajo con las técnicas que se asocian a ellos en el bloque práctico, y su cuestionamiento tecnológico, es lo que permite enfrentar la desarticulación entre los enfoques sintético y analítico.

T_1^1 : Calcular los elementos de una elipse dada su ecuación.

$t_{1,1}^1$: Calcular los elementos de una elipse dada su ecuación reducida.

$\tau_{1,1}^1$: Calcular la distancia focal (c) a partir de la longitud de los semidiámetros (a y b) y luego calcular las coordenadas del centro, los focos y los vértices conociendo a, b y c.

$t_{1,2}^1$: Calcular los elementos de una elipse dada su ecuación general.

$\tau_{1,2}^1$: Completar cuadrados en la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ para obtener la ecuación reducida de una elipse, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ y luego utilizar $\tau_{1,1}^1$.

T_1^2 : Determinar la ecuación reducida de una elipse conociendo algunos de sus elementos característicos y un punto perteneciente a la misma.

$t_{1,1}^2$: Determinar la ecuación reducida de una elipse conociendo sus focos y un punto de la misma.

$\tau_{1,1}^2$: Calcular la suma de las distancias a los focos desde un punto dado de la elipse (2a).

Calcular las coordenadas del centro de la elipse conociendo las coordenadas de los focos y determinar la distancia focal (c).

Calcular la longitud de un semieje (b) conocida la longitud del otro (a) y la distancia focal.

$t_{1,2}^2$: Determinar la ecuación reducida de una elipse conociendo sus vértices.

$\tau_{1,2}^2$: Calcular las coordenadas del centro de la elipse conociendo las coordenadas de los vértices ubicados en los extremos de un mismo eje.

Calcular las longitudes de los semidiámetros conociendo las coordenadas del centro y los vértices.

$t_{1,3}^2$: Determinar la ecuación reducida de una elipse conociendo un foco, el centro y un vértice.

$\tau_{1,3}^2$: Determinar cuál es el semidiámetro desconocido y calcular su longitud a partir de la distancia focal y la longitud del semidiámetro conocido.

$t_{1,4}^2$: Determinar la ecuación reducida de una elipse conociendo el centro, un vértice y un punto perteneciente a la misma.

$\tau_{1,4}^2$: Determinar cuál es el semidiámetro desconocido y calcular su longitud resolviendo la ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

T_1^3 : Graficar una elipse conociendo algunos de sus elementos.

$t_{1,1}^3$: Graficar una elipse conociendo sus focos y un punto de la misma.

$\tau_{1,1,1}^3$: Técnica del jardinero.

$\tau_{1,1,2}^3$: Técnica del jardinero instrumentada con GeoGebra (GGB).

$t_{1,2}^3$: Graficar una elipse conociendo sus vértices.

$\tau_{1,2,1}^3$: Técnica de la tarjeta, compás de Arquímedes o elipsógrafo.

$\tau_{1,2,2}^3$: Técnica de la tarjeta instrumentada con GGB.

T_2^3 : Graficar una elipse conociendo su ecuación.

$t_{2,1}^3$: Graficar una elipse conociendo su ecuación reducida.

$\tau_{2,1}^3$: Determinar 2a y los focos y graficar usando $\tau_{1,1,2}^3$.

$t_{2,2}^3$: Graficar una elipse conociendo su ecuación general.

$\tau_{2,2}^3$: Completar cuadrados y usar $\tau_{2,1}^3$.

T_1^4 : Determinar si una ecuación dada es la ecuación de una elipse.

$t_{1,1}^4$: Determinar si una ecuación de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ es la ecuación de una elipse.

$\tau_{1,1,1}^4$: Determinar analizando los signos de A y B, no nulos, si es la ecuación de una elipse de ejes paralelos a los coordenados, un punto o si ningún punto la verifica.

$\tau_{1,1,2}^4$: Completar cuadrados en la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ para obtener la ecuación reducida de una elipse, $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

T_2^4 : Determinar si una curva cerrada simple es la gráfica de una elipse.

$t_{2,1}^4$: Determinar si un óvalo dado es una elipse.

$\tau_{2,1,1}^4$: Técnica geométrica.

$\tau_{2,1,2}^4$: Técnica geométrica instrumentada con GGB.

$\tau_{2,1,3}^4$: Técnica analítica.

$\tau_{2,1,4}^4$: Técnica de ajuste conocidos cinco puntos instrumentada con GGB.

$t_{2,2}^4$: Determinar si la curva que resulta de una transformación geométrica biunívoca de una elipse también es una elipse.

$\tau_{2,2,1}^4$: Técnica geométrica.

$\tau_{2,2,2}^4$: Técnica geométrica instrumentada con GGB.

$\tau_{2,2,3}^4$: Técnica analítica.

$t_{2,3}^4$: Determinar si la trayectoria descrita por un punto móvil es una elipse.

$\tau_{2,3,1}^4$: Técnica geométrica instrumentada con GGB.

$\tau_{2,3,2}^4$: Técnica analítica.

Algunas de las praxeologías puntuales $PP = [t / \tau / \theta / \Theta]$ que pueden identificarse en esta estructura praxeológica y para la institución mencionada son:

$PP_{DEER} = [t_{1,1}^1 / \tau_{1,1}^1 / \theta_E / \Theta]$

$PP_{DEEG} = [t_{1,2}^1 / \tau_{1,2}^1 / \theta_{CO} / \Theta]$

$PP_{HFP} = [t_{1,1}^2 / \tau_{1,1}^2 / \theta_E / \Theta]$

$PP_{HVV} = [t_{1,2}^2 / \tau_{1,2}^2 / \theta_E / \Theta]$

$PP_{HFCV} = [t_{1,3}^2 / \tau_{1,3}^2 / \theta_E / \Theta]$

$PP_{HCVP} = [t_{1,1}^1 / \tau_{1,4}^2 / \theta_{RC} / \Theta]$

etc.

La tecnología de la OML Elipse podría escribirse $\theta = \theta_{CI} \cup \theta_{CO} \cup \theta_{RC} \cup \theta_E$ donde, de manera sintética:

θ_{CI} : La ecuación de la circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r es $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$.

θ_{CO} : Transformación de una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ en otra de la forma $a(x - h)^2 + k$.

θ_{RC} : Conjunto solución de una ecuación cuadrática.

θ_E : Ecuación reducida de la elipse con centro en el origen de coordenadas y diámetros mayor y menor coincidentes con los ejes x e y respectivamente.

La teoría θ es la Geometría plana (enfoque sintético y analítico).

3.3. Cuestiones y actividades

El esquema de la Figura 1 presenta la cuestión generatriz, las cuestiones derivadas y algunas de las actividades propuestas a los estudiantes. Estaríamos avanzando aquí en la elaboración de un MPR en segunda persona (es decir cómo lo resolverían nuestros estudiantes).

No presentamos aquí todas las actividades desarrolladas, sólo las que consideramos más relevantes para mostrar el desarrollo de la AEI.

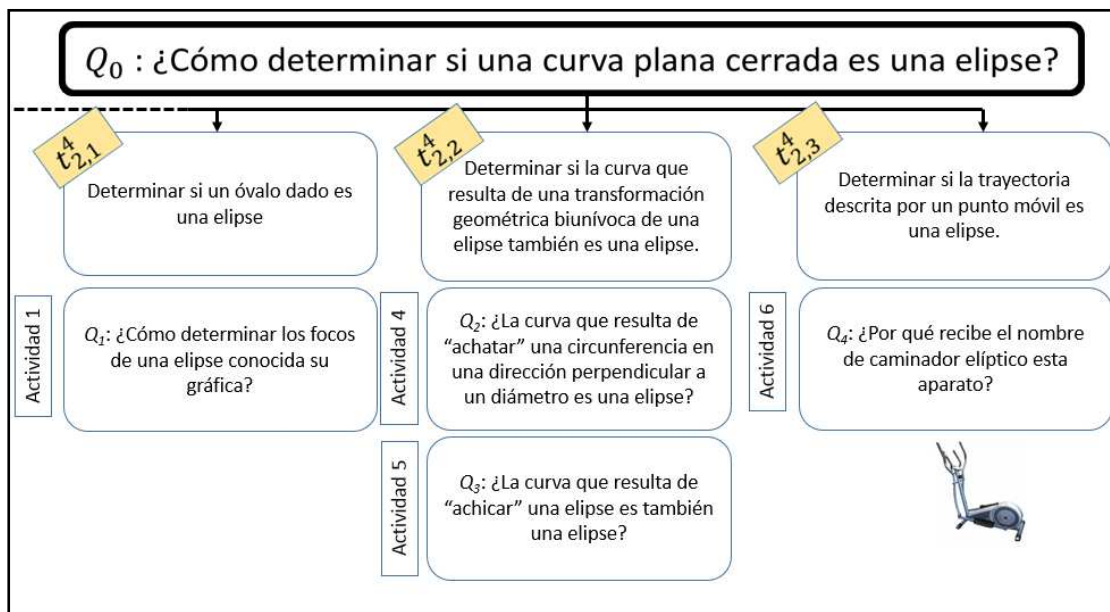


Fig. 1

3.4. Descripción de algunas de las actividades

3.4.1. Actividad 4

Consigna:

En la siguiente figura la curva cerrada que pasa por P es una circunferencia. El punto Q se encuentra ubicado sobre la recta normal al diámetro punteado que pasa por P y equidistante de ambos. Desplazando P sobre la circunferencia y representando los puntos Q construidos como se explicó anteriormente se obtiene la curva que se muestra en trazo grueso. ¿Esta curva así obtenida, a la que llamaremos "circunferencia achatada" es una elipse?

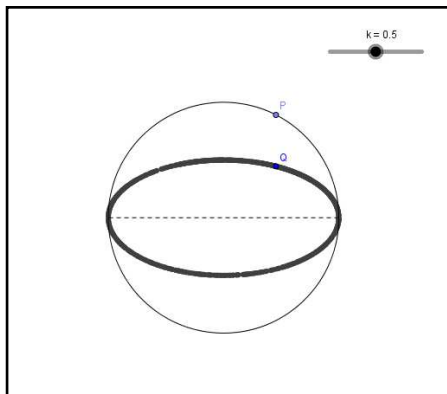


Fig. 2

En esta actividad se espera que los estudiantes utilicen la técnica analítica que se describe a continuación:

La ecuación de la circunferencia, sin pérdida de generalidad, puede considerarse como

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1)$$

Podemos escribir, para cualquier $k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 1$, las coordenadas del punto (x', y') como sigue:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

Luego, $y = \frac{y'}{k}$. Sustituyendo en (1) obtenemos

$$x'^2 + \left(\frac{y'}{k}\right)^2 = a^2$$

Operando,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{(ak)^2} = 1$$

Queda demostrado que la curva descrita por los puntos (x', y') es una elipse.

3.4.2. Actividad 5

Consigna:

En la siguiente figura, la curva punteada que pasa por D es una elipse.

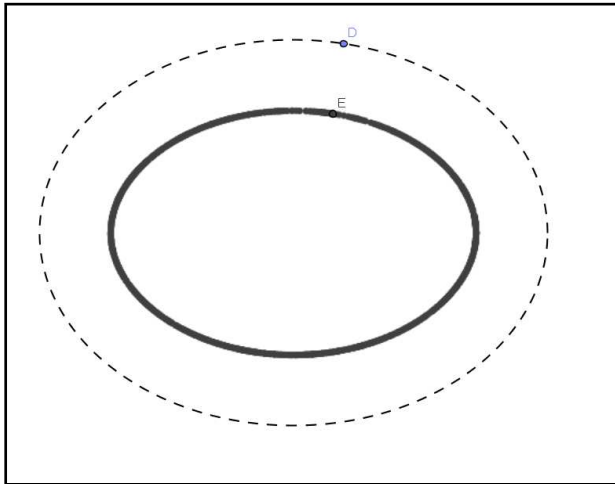


Fig. 3

La curva que pasa por E fue construida de tal modo que podríamos decir que es una elipse “achicada”.

¿Cómo se dibujó el punto E? Por el punto D se trazó una recta L_1 tangente a la elipse, luego una recta perpendicular a L_1 que llamaremos L_2 y sobre esa recta, a una distancia m de D ubicó el punto E.

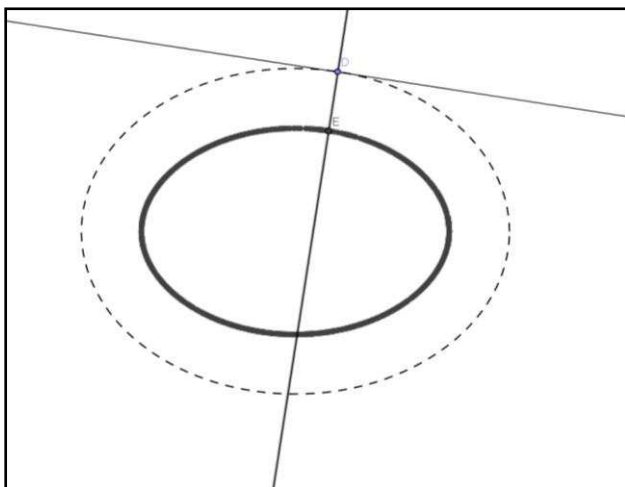


Fig. 4

Si repetimos la construcción anterior para cada punto de la elipse que pasa por D obtendríamos los puntos de la curva que pasa por E (trazo continuo). ¿Es esta curva una elipse? Justifique sus afirmaciones.

Para resolver esta actividad puedes utilizar las gráficas de la siguiente página (te sugerimos fotocopiarla antes de usarla), útiles de geometría, lápiz/papel, o la escena de GGB que te entregamos. Lo que prefieras o consideres más útil. La próxima clase te pedimos que nos entregues tus producciones escritas o en la escena de GGB.

En nuestro análisis a priori consideramos que, frente a esta cuestión, los estudiantes conjeturarían que la “elipse

achicada” no es una elipse y recurrirían a la GA para desarrollar alguna prueba similar a la siguiente:

Tomarían una elipse particular, construirían la curva achicada, supondrían que es una elipse y llegarían a un absurdo.

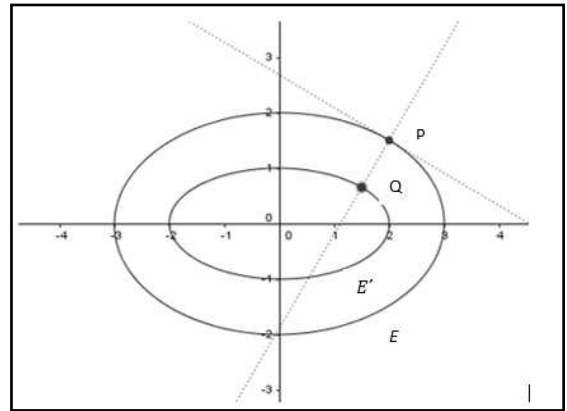


Fig. 5

$$\text{Proponemos } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad y \quad k = 1$$

Si la curva que resulta de achicar esta elipse en $k = 1$ fuera una elipse, deberá ser: $E': \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Tomo un punto P sobre la gráfica de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ que denominaremos E, lo “achico” en $k = 1$, obtengo P'. Veo que $Q \notin E'$.

Elijo la abscisa de P con el valor $x = 2$

$$f(2) \text{ en } f(-3,3) \rightarrow \mathbf{R} > 0$$

$$f(x) = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) 4} = \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$$

$$f(2) = \frac{2}{3} \sqrt{5}$$

$$\text{Entonces } P = \left(2, \frac{2}{3} \sqrt{5}\right)$$

Hallamos la recta tangente a la gráfica de la elipse que pasa por el punto P

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{9 - x^2}} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \frac{-4}{3 \cdot \sqrt{5}}$$

La recta tangente que pasa por el punto P es:

$$y - \frac{2}{3} \sqrt{5} = -\frac{4}{3 \sqrt{5}} (x - 2)$$

La normal (N) que pasa por el punto P es:

$$y - \frac{2}{3} \sqrt{5} = \frac{3 \sqrt{5}}{4} (x - 2)$$

Busco Q en N tal que, $d(P, P') = 1$

Q será de la forma $\left(a; \frac{3}{4} \sqrt{5} (a - 2) + \frac{2}{3} \sqrt{5}\right)$ por estar sobre la normal N

Si $d(P; Q) = 1$

$$(a - 2)^2 + \left[\frac{3}{4} \sqrt{5} (a - 2)\right]^2 = 1^2$$

$$(a - 2)^2 + \frac{9}{16} 5 (a - 2)^2 = 1$$

$$(a - 2)^2 \cdot \frac{61}{16} = 1$$

$$(a - 2)^2 = \frac{16}{61}$$

$$|a - 2| = \frac{4}{\sqrt{61}}$$

Como $a < 2$

$$-a + 2 = \frac{4}{\sqrt{61}}$$

$$Q = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{61}}; N\left(2 - \frac{4}{\sqrt{61}}\right)\right)$$

$$Q = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{3}{4}\sqrt{5}\left(2 - \frac{4}{\sqrt{61}} - 2\right) + \frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$$

$$Q = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{3}{4}\sqrt{5}\left(\frac{-4}{\sqrt{61}}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$$

$$Q = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{61}} + \frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$$

Veo si $Q \in E'$, es decir veo si valen las igualdades:

$$\frac{\left(2 - \frac{4}{\sqrt{61}}\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{61}}} + \frac{\left(\frac{-3\sqrt{5}}{\sqrt{61}} + \frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^2}{1} = 1?$$

$$\frac{4 - \frac{16}{\sqrt{61}} + \frac{16}{61}}{4} + \frac{9.5}{61} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{61}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{9} \cdot 5 = 1?$$

$$\frac{1}{4} - \frac{4}{\sqrt{61}} + \frac{4}{61} + \frac{45}{61} - \frac{20}{\sqrt{61}} + \frac{20}{9} = 1?$$

$$\frac{-24}{\sqrt{61}} + \frac{49}{61} + \frac{20}{9} = 0?$$

$$\frac{24}{\sqrt{61}} = \frac{49.9 + 20.61}{61.9}?$$

$$\frac{24}{\sqrt{61}} = \frac{1661}{549} \text{ que es falso.}$$

Por lo tanto, Q no pertenece a E' .

3.4.3. Actividad 6

Consigna:

El aparato que se muestra en la figura es muy común en los gimnasios



Fig. 6

Habitualmente se lo conoce con el nombre "caminador elíptico" ¿Por qué crees que se llama así? ¿Hay algún/os punto/s de este aparato que describa/n una elipse cuando está en movimiento?

Aunque suponíamos que todos los estudiantes habían visto caminadores elípticos alguna vez les mostramos, al comenzar la actividad, un video de una clase en un gimnasio donde se veía a varias personas utilizándolos y, con mucho detalle, el movimiento que realiza cada una de sus componentes.

Nos detendremos en el análisis de esta actividad que consideramos "el corazón" de la AEI en la sección 5.

4. RESULTADOS

La cuestión derivada Q_1 (ver Fig. 1) nos llevó al estudio de los focos de las elipses y su determinación a partir de sus propiedades y la gráfica. En la Actividad 1 presentamos a los estudiantes cuatro gráficas de elipses: dos en hoja en blanco y dos con ejes cartesianos. De las dos primeras, una con ejes oblicuos sin estar trazados y la otra igual, pero con un único eje trazado. De las presentadas en ejes cartesianos, una de ellas tiene su centro en el origen del sistema y la otra lo tiene sobre el eje x , pero desplazado del origen. Fueron seleccionadas de esa manera para poder analizar las técnicas (sintéticas y/o analíticas) puestas en juego en relación con la presencia/no presencia de ejes o el sistema de coordenadas.

Mostramos en las figuras 7 y 8 dos producciones de estudiantes que encararon la resolución por la vía analítica, a la que acceden luego de trazar "a ojo" los ejes y medir aproximadamente las distancias necesarias para utilizar la fórmula.

Solo un estudiante utiliza técnicas sintéticas, pero a partir de haber trazado "a ojo" el eje principal, que puede verse en la figura 9.

En las figuras 10 y 11 pueden verse cómo algunos estudiantes optaron por una técnica sintética mientras otros eligieron una técnica analítica (óptima).

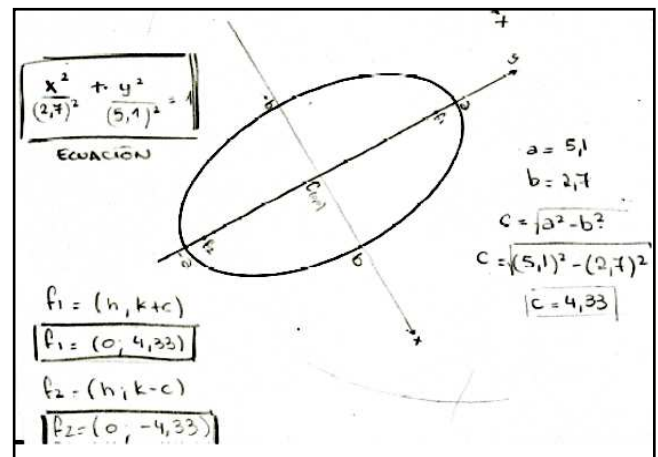


Fig. 7

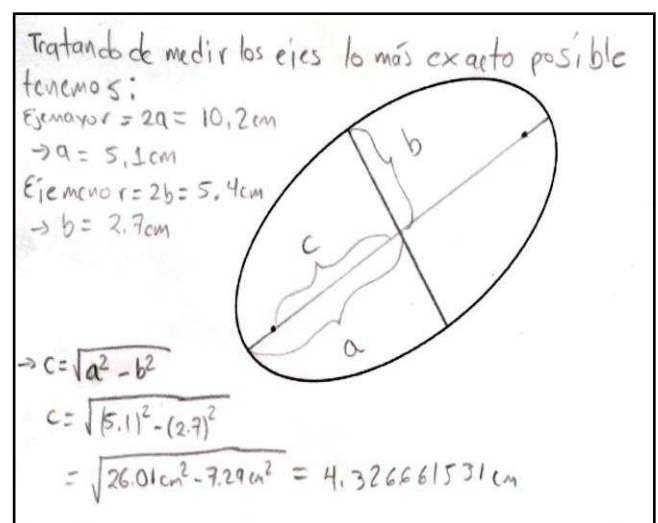


Fig. 8

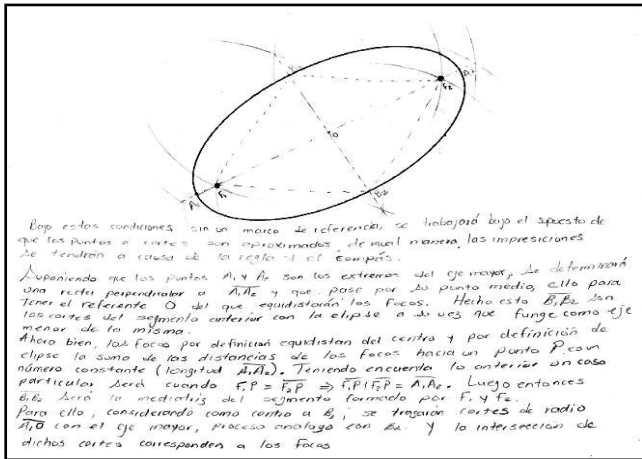


Fig. 9

por uno de ellos.

Primer modelo

El punto E describe un arco de circunferencia.
 Este modelo describe más fielmente la realidad.

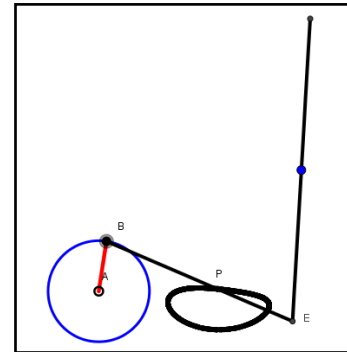


Fig. 12

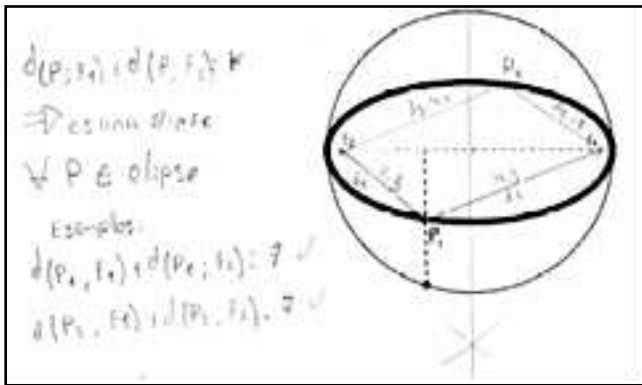


Fig. 10

Segundo modelo

El punto E describe un segmento.
 Este modelo es una representación del mecanismo biela – manivela.

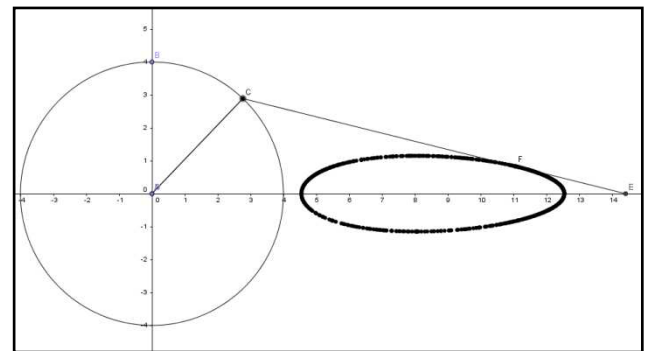


Fig. 13

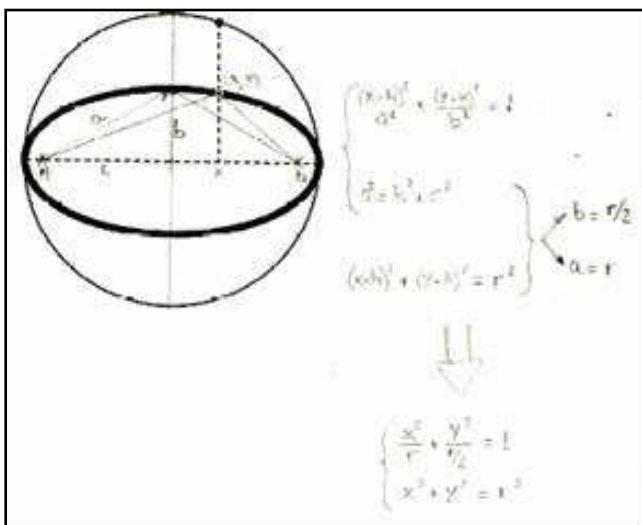


Fig. 11

5. DISCUSION

En esta sección presentamos dos modelos posibles para afrontar la Actividad 6 y las razones por las cuales optamos

Este modelo simplifica la situación real sustituyendo el movimiento circular de E por un movimiento rectilíneo.

Optamos por presentar a los estudiantes el segundo modelo por dos razones:

- 1) una relacionada con la gestión didáctica. En el primer modelo era evidente a simple vista que la curva descrita por F no es una elipse.
- 2) otra vinculada con los conocimientos e intereses de los estudiantes. El curso pertenecía a la carrera de Ingeniería Automotriz. El mecanismo biela – manivela es de sumo interés en esa especialidad (por ejemplo, el motor de combustión interna se basa en ese mecanismo)

Decidimos que en un primer momento la longitud de la biela (segmento CE) fuera fija y sólo se pudiese cambiar la posición del punto F (idealización del punto de apoyo del pie)

A partir de esa escena dinámica, los estudiantes aseguraron en una primera instancia que la curva correspondía a una

elipse.

Luego, en otra escena que pusimos a disposición de los alumnos, podía modificarse la longitud de la biela.

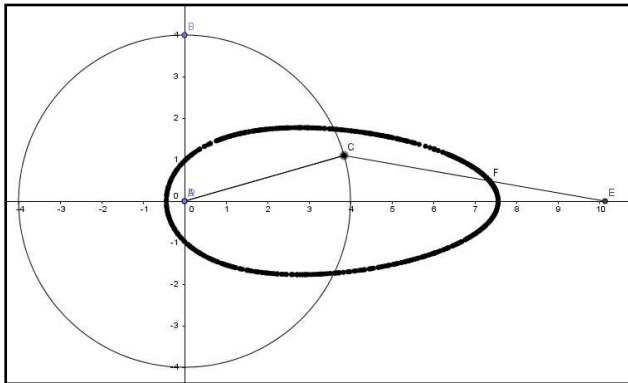


Fig. 14

Entonces, al explorar distintas configuraciones del mecanismo, cambiando las medidas de la biela y manivela, obtuvieron curvas lo que los llevaron a abandonar su primera conjetura.

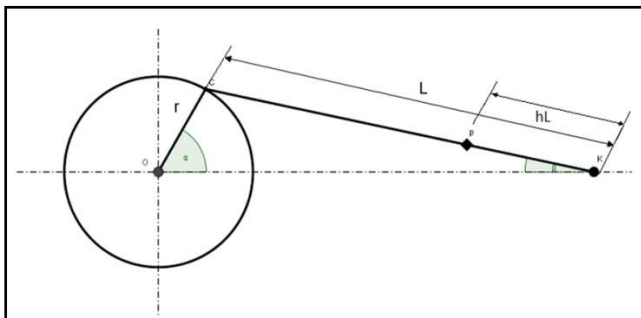


Fig. 15

A partir de entonces se les pregunta si existirá alguna configuración en la que la curva sí resulta elipse. Tras la exploración, deciden probar que ninguna de las curvas es una elipse. En ese momento abandonan la GS y relegan a un segundo plano al GGB que hasta allí había tenido un rol central en la elaboración de conjeturas y visualización de casos particulares. El abordaje analítico del problema llevó a los estudiantes a construir modelizaciones similares a la de la Figura 15 y el proceso de estudio los llevó al uso de técnicas de GA.

Siendo

r: longitud de la manivela.

L: longitud de la biela.

k: punto correspondiente al pie de la biela.

O: punto del centro de la circunferencia de radio r y origen del sistema de coordenadas (x, y) .

p: punto genérico de la biela.

c: punto correspondiente al botón de la manivela.

α : ángulo de la manivela con respecto al eje horizontal, en sentido horario.

β : ángulo de la biela con respecto al eje horizontal, en sentido anti horario.

Y definiendo

h: fracción de longitud de **L**, de forma tal que la longitud del segmento \overline{pk} es **h.L**

En un instante cualquiera, el punto **p**, tendrá por coordenadas:

$$x_p = r \cdot \cos \alpha + L \cdot \cos \beta - h \cdot L \cdot \cos \beta$$

$$\boxed{x_p = r \cdot \cos \alpha + L \cdot \cos \beta (1-h)} \quad (1)$$

Dada la geometría podemos observar que:

$$r \cdot \sin \alpha = L \cdot \sin \beta \Rightarrow \boxed{\sin \beta = \frac{r}{L} \sin \alpha} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y reescribiendo

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \alpha} \text{ tenemos:}$$

$$\boxed{x_p = r \cdot \cos \alpha + L \cdot (1-h) \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \alpha}} \quad (3)$$

En cuanto a la coordenada y , tenemos:

$$y_p = h \cdot L \cdot \sin \beta = h \cdot L \cdot \frac{r}{L} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \boxed{y_p = h \cdot r \cdot \sin \alpha} \quad (4)$$

Donde (3) y (4) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un punto genérico de la biela, a una distancia **h.L** del pie, en función de la variación del ángulo α .

Si suponemos que **L** es considerablemente mayor que **r**, podremos describir esas trayectorias, como una familia de elipses de semieje mayor horizontal igual a **r**, desde los casos límites $h = 0$, en el cual tendremos un segmento de recta, y

$h = 1$, donde tendremos una circunferencia de radio **r**.

Es importante observar, que para $h = 0$, nos encontramos en el punto correspondiente al pie de la biela, que, como indicamos anteriormente, es el encargado de transmitir el movimiento lineal alternativo, y para $h = 1$, nos encontraremos en el punto correspondiente al botón de la manivela, dotado de movimiento circular.

Definiremos $\lambda = \frac{L}{r}$.

Cabe aclarar que también es común encontrar a λ como la relación inversa, pero en este caso nos resulta más conveniente a fines de simplicidad en los cálculos definirla de esta forma, queda a criterio del lector invertir la relación de ser necesario.

Operando, a partir de la ecuación (3):

$$x_p = r \cdot \cos \alpha + L \cdot (1-h) \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \alpha}$$

$$x_p = r \cdot \left(\cos \alpha + \frac{L}{r} \cdot (1-h) \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \alpha} \right)$$

$$x_p = r \cdot \left(\cos \alpha + \lambda \cdot (1-h) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2} \sin^2 \alpha} \right)$$

$$\boxed{x_p = r \cdot \left(\cos \alpha + (1-h) \cdot \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha} \right)} \quad (5)$$

Si asumimos

$$\lambda \gg 1 \Rightarrow \lambda^2 \gg 1 \Rightarrow \lambda^2 \gg \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha} \cong \sqrt{\lambda^2} \cong \lambda$$

Si reescribimos (5) con la simplificación anterior, queda:

$$\boxed{x_p = r \cdot \cos \alpha + r(1-h) \cdot \lambda} \quad (6)$$

De la ecuación (4), tenemos:

$$y_p = h \cdot r \cdot \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\sin^2 \alpha = \frac{y_p^2}{(h \cdot r)^2}} \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6), y operando:

$$x_p = r \cdot \cos \alpha + r(1-h) \cdot \lambda$$

$$(x_p - r(1-h) \cdot \lambda)^2 = r^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$(x_p - r(1-h) \cdot \lambda)^2 = r^2 \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$(x_p - r(1-h) \cdot \lambda)^2 = r^2 \cdot \left(1 - \frac{y_p^2}{(h \cdot r)^2} \right)$$

Obtenemos:

$$\boxed{\frac{(x_p - r(1-h) \cdot \lambda)^2}{r^2} + \frac{y_p^2}{(h \cdot r)^2} = 1} \quad (8)$$

Que es la ecuación de una familia de elipses de semieje mayor **r**, coordenada **x** del centro variable con **h** y **λ**, y semieje menor variable con **h**.

Los estudiantes lograron producir desarrollos analíticos similares al anterior.

Puede entenderse ahora porque en la primera parte de la Actividad 6 los estudiantes conjeturaban que las curvas descritas por el punto F eran elipses. Dado que L es mucho mayor que r la diferencia entre las curvas descritas por las ecuaciones (3) y (4) son muy parecidas a las que describe la ecuación (8).

CONCLUSIONES

El estudio alrededor de las distintas OM, favorecido por las escenas de GGB provistas por el docente o construidas por ellos mismos, permitió a los estudiantes utilizar técnicas de la Geometría Sintética que sirvieran para responder las preguntas. Al avanzar, fueron necesarias técnicas tanto de la GS como GA llegando en el último caso a ponerse de manifiesto la insuficiencia de las técnicas sintéticas para explicar por qué no hay ningún diseño de caminadores elípticos en los cuales la trayectoria que describe el pié (idealizado) sea una elipse.

Hacia el final de la AEI los estudiantes pudieron reflexionar sobre las diferentes estrategias que habían utilizado logrando identificar las razones por las cuales cada situación era abordable por ambos enfoques o sólo por uno de ellos. Desde nuestro punto de vista quedó de manifiesto que la insuficiencia de las técnicas sintéticas emergió como la “razón de ser” de las técnicas analíticas.

Un enfoque integrador de la GS y la GA sumado al uso de TIC, especialmente con escenas dinámicas permitió enfrentar un problema complejo de la Ingeniería (el mecanismo biela – manivela) en una materia de primer año. Abordamos así otra desarticulación presente en la institución en la que se implementó la AEI, la desarticulación entre la Matemática y la Ingeniería.

En este momento nos encontramos analizando a partir de los protocolos y otros registros la completitud relativa de la OML mediante los indicadores descritos en el marco teórico.

Respecto de la articulación entre el enfoque sintético y analítico podemos afirmar, como resultado del análisis de las producciones de los estudiantes y de las respuestas en cuestionarios, que lograron identificar al finalizar cada encuentro qué técnicas habían utilizado, cuáles y por qué les permitieron responder las cuestiones planteadas. En su mayoría, pudieron explicitar las razones por las cuales en las primeras actividades las técnicas de la GS eran suficientes para proponer una respuesta y en cambio en las últimas sólo GA brindaba una respuesta aceptable para el grupo de estudio.

Puede observarse claramente en la sección 5 que el nivel de modelización alcanzado es el tercero.

Nos parece importante destacar también que, en el proceso de estudio, aun tratándose de una AEI, pudimos observar gestos (aunque no plenos) de la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM). Nos referimos a las actitudes Herbartiana, Procognitiva, Exotérica y de Enciclopedista Ordinario (Otero, 2013).

REFERENCIAS

Acosta Gempeler, M. (2004). La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías. Comunicación para el Primer Congreso Internacional de la TAD. Universidad de Jaén.

- Bernat, A. (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria en *Un panorama de la TAD*, Centre de Recerca Matemàtica, pp. 533 – 551. ISSN 2014-2331. Disponible en http://ddd.uab.cat/pub/l1ibres/2011/hdl_2072_200617/Documents10.pdf
- Bosch, M.; Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(2-3), pp. 205-250.
- Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Cómo hacer una previsión de ventas. Propuesta de un recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 835-857). Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*, [En línea], Recuperado el 17 de Julio de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passé_et_present_de_la_TAD-2.pdf
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. Disponible en <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.
- Gascón, J. (2002a). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático. En: *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales* N°28. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Gascón, J. (2002b). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, pp. 13-25.
- Oliveira Lucas, C. (2015). Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional. Tesis Doctoral. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo. Disponible en: <http://www.atd-tad.org/documentos/una-posible-razon-de-ser-del-calculo-diferencial-elemental-en-el-ambito-de-la-modelizacion-funcional/>
- Otero, M.; Fanaro, M. y Corica, A. (2013). La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Dunken.
- Ruiz Munzón, N. (2010). La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=2343969>
- Santos Trigo, M.; Espinosa-Pérez, H. & Reyes-Rodríguez, A. (2008). Connecting dynamic representations of simple mathematical objects with the construction and exploration of conic sections. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39:5, pp 657 – 669.

Mario Di Blasi Regner

Es Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática, título otorgado por la Universidad Nacional de General San Martín y candidato a Doctor en el Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Se desempeña como Profesor Asociado Regular con dedicación exclusiva en la Facultad Regional General Pacheco de la Universidad Tecnológica Nacional (FRGP – UTN) dónde ocupa el cargo de Director del Departamento de Materias Básicas y es Consejero Directivo. En su carrera de investigador ha codirigido y dirigido varios proyectos de investigación y desarrollo, participó como expositor en importantes congresos internacionales de Educación Matemática y publicó los resultados de sus investigaciones en revista nacionales e internacionales. Es Director de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en la FRGP – UTN desde el año 2005.