REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Conocimiento matemático para la enseñanza de geometría analítica en futuros profesores

Virginia Ciccioli, **Natalia Sgreccia**

ciccioli@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250, Rosario, Argentina.

Resumen

El trabajo que aquí se presenta consiste en una síntesis de la investigación realizada en torno a la tesis doctoral "*Conocimiento Matemático para la Enseñanza* de la geometría analítica. El caso del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario" (Argentina). La misma se propone caracterizar la configuración de dicho conocimiento a través de la carrera y sugerir consecuentemente algunas líneas de acción. Tiene un enfoque eminentemente cualitativo y alcance descriptivo. Es de tipo empírica y transversal, con diseño de estudio de caso. Los resultados revelan indicios de activación de distintos dominios del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* de la geometría analítica, destacándose la centralidad de algunos de ellos. Asimismo, se devela cómo, gradualmente durante la formación, algunos aspectos de este conocimiento se van robusteciendo desde la acción intencionada.

Palabras clave: Formación de profesores, Conocimiento matemático, Enseñanza, Geometría analítica.

Mathematical knowledge for the teaching of analytical geometry in future teachers

The work presented here consists of a synthesis of the research carried out around the doctoral thesis "*Mathematical Knowledge for the Teaching* of analytical geometry. The case of the Mathematics Teacher career of the National University of Rosario" (Argentina). It aims to characterize the configuration of this knowledge throughout the career and consequently suggest some lines of action. It has an eminently qualitative approach and descriptive scope. It is empirical and transversal, with a case study design. The results reveal clues of activation of different domains of *Mathematical Knowledge for the Teaching* of analytical geometry, highlighting the centrality of some of them. Likewise, it is revealed how, gradually during training, some aspects of this knowledge are strengthened from the intended action.

Keywords: Teachers' training, Mathematical Knowledge, Teaching, Analytical Geometry

Connaissances mathématiques pour l'enseignement de la géométrie analytique dans les futurs professeurs

Résumé

Le travail présenté ici consiste en une synthèse des recherches menées autour de la thèse de doctorat "Connaissances mathématiques pour l'enseignement de la géométrie analytique. Le cas des étudiants de la de la carrière de Professeurs de Mathématiques de la Université Nationale de Rosario" (Argentine). Elle vise à caractériser la configuration de ces connaissances tout au long de la carrière et propose donc quelques pistes d'action. Elle a un objectif éminemment qualitatif et une portée descriptive. Elle est de type empirique et transversal, avec un plan d'étude de cas. Les résultats révèlent des signes d'activation de différents domaines de connaissances mathématiques pour l'enseignement de la géométrie analytique, soulignant la centralité de certains d'entre eux. De même, il est révélé comment progressivement, au cours de la formation, certains aspects de ces connaissances sont renforcés à partir de l'action intentionnelle.

Recepción: 18/05/2020 *Aceptación: 30/06/2020*

Mots clés: Formation dans les professeurs, Connaissances Mathématiques, Enseignement, Géométrie Analytique

1. INTRODUCCIÓN

Hacia fines de la década de 1980 se renueva la trascendencia de la geometría para el currículum de Matemática, después de haber estado postergada debido a la influencia del movimiento de la Matemática Moderna. Desde entonces, diversos documentos de eventos y asociaciones internacionales señalan la importancia de la incorporación de la geometría en todos los niveles escolares, destacando su aporte a la interpretación de fenómenos reales así como a la comprensión matemática (Atiyah, 1977; Blanco y Barrantes, 2003; National Council of Teachers of Mathematics, 2007; Carreño y Climent, 2019).

Diversos autores amplían las razones que refuerzan la importancia de la incorporación de la geometría en el currículum escolar: permite desarrollar la capacidad de visualizar (Jones, 2002), fomenta la producción de conjeturas y el razonamiento deductivo a través de la resolución de problemas en variados contextos (Jones, Fujita y Ding, 2006) y promueve la transferencia de habilidades a otras áreas del conocimiento matemático (Pinto-Leivas, 2011).

Sin embargo, algunas investigaciones han indicado la ausencia o superficialidad en el abordaje de contenidos geométricos (Ponte, Matos y Abrantes, 1998; Crescenti, 2008; Corica y Marín, 2014; Gaita-Iparraguirre, 2015), con énfasis en lo algebraico, sin vinculación o complementariedad entre la geometría de las formas -sintética- y la de coordenadas -analítica-. Este hecho se evidencia tanto en el nivel secundario (Gascón, 2002; Ancochea, 2011) como en la formación de profesores (Henríquez y Montoya, 2015). Saorín-Villa, Torregrosa-Gironés y Quesada-Villela (2019) asocian algunas dificultades en la resolución de problemas geométricos a la independencia que adquiere el trabajo en el registro algebraico con respecto al geométrico, lo que lleva a soluciones que no son necesariamente válidas en el contexto geométrico inicial. Valencia (1990) y Regner y Rodríguez (2016) agregan que, como consecuencia de esta fragmentación, los estudiantes no logran dilucidar que la geometría analítica es geometría euclidiana, motivo por el que no llegan a adquirir una idea de sus alcances y limitaciones.

En este sentido, Jones (2000) reconoce que la mayoría de los profesores no están formados ni disciplinarmente ni pedagógicamente en geometría. Asimismo, Lorenzato (1995, citado en Crescenti, 2008) relaciona el modo en que la geometría se enseña en las escuelas con la escasa profundidad que se da a su tratamiento en la formación de profesores.

En la escolaridad secundaria en Argentina, la geometría tiene presencia obligatoria en todos los años (Argentina. Consejo Federal de Educación, 2011, 2012). Por tal motivo, resulta relevante preguntarse cómo este hecho es concebido desde la formación de profesores en este país. El esquema que se mantiene actualmente en los diseños curriculares plantea la incorporación de la geometría sintética en los primeros años de la escolaridad secundaria y de la geometría analítica en los últimos (con algunos indicios de representaciones en ejes cartesianos en los primeros años), en similitud con lo que se observa en los diseños curriculares en España. Este hecho, según señala Gascón (2002, 2003) se sustenta en acuerdos alcanzados por grandes matemáticos a comienzos del siglo XX que no han sido sólidamente fundados, acentuándose la problemática en la formación de profesores.

Es así que surge como un espacio propicio de indagación la formación de profesores orientada a la integración de los aportes de las distintas ramas de la Matemática que dieron lugar al surgimiento de la geometría analítica y a un trabajo consistente en la construcción de los significados desde los distintos registros de representación que constituyen su propia génesis.

En efecto, De Villiers (1997) ha solicitado cambios importantes en los programas de formación de profesores sosteniendo que incluso los profesores “cualificados” en Matemática de secundaria apenas conocen más geometría que sus alumnos. Atender a esta cuestión reviste un carácter de urgencia, en tanto el tipo de experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor es determinante para su desempeño profesional.

En este sentido, un espacio propicio de indagación lo constituye la formación inicial de profesores en Matemática. Más aún, dada la importancia para la formación de los modelos docentes vividos (Santaló, 1999), resulta de interés conocer cómo se van cimentando las bases de toda una rama de la Matemática tan trascendente, como es la geometría analítica, en estudiantes que proyectan ser profesores.

Interesados en develar qué es lo que el docente pone en juego en su práctica áulica, el grupo Michigan liderado por Ball ha venido realizando estudios empíricos en los que se pone en evidencia la conjunción de distintos cuerpos de conocimiento de interés para la enseñanza de la Matemática y han estado analizando desde hace más de dos décadas los tipos de conocimiento que se requieren para la enseñanza de la Matemática (Ball, 1999).

Puntualmente se procura caracterizar la configuración del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (*MKT*, por sus siglas en inglés, Ball, Thames y Phelps, 2008) de la geometría analítica en el Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR, Argentina) y delinear algunas acciones que propendan al fortalecimiento de tal formación. Específicamente se indaga:

- ¿Cómo se produce el inicio de la construcción del *MKT* de la geometría analítica en las prácticas específicas donde se sientan las bases de dicha rama de la Matemática en el PM de la UNR?
- ¿De qué manera se profundiza el proceso de dicha construcción desde espacios curriculares que problematizan las prácticas de enseñanza?

Para aproximar respuestas a ello, este artículo sintetiza la contribución de la tesis "*Conocimiento Matemático para la Enseñanza* de la geometría analítica. El caso del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario" del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina). En correspondencia con los interrogantes delimitados, los objetivos específicos de la tesis han sido:

- Describir las condiciones institucionales, en términos de prácticas de la enseñanza, en que se inicia la construcción del *MKT* de la geometría analítica en futuros profesores en Matemática.

- Indagar acerca de la configuración del *MKT* de la geometría analítica en estudiantes avanzados del PM.

2. ESTADO DEL ARTE

Muchos estudios se han realizado con la intención de caracterizar un tipo especial de conocimiento requerido para la enseñanza, desde la introducción por Shulman (1986) de la noción de *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (*PCK*, por sus siglas en inglés). Resulta evidente la importancia del dominio del profesor sobre los contenidos que enseña. Nadie puede enseñar lo que no sabe bien. Sin embargo, no es evidente cómo caracterizar este dominio atendiendo a las necesidades específicas de su enseñanza (Ponte, 2014; Chapman, 2015), en particular de la geometría (Sgreccia y Massa, 2012).

Varios modelos se han propuesto para describir el conocimiento matemático para la enseñanza. Algunos de ellos son: Proficiencia en la Matemática escolar (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), Cuarteto Matemático (Rowland, 2008); Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*MTSK*, Muñoz Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015); Idoneidad Didáctica (Godino, 2009); Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al., 2008). Sustentados en estos modelos, se han realizado diversos estudios focalizándose en algunos dominios o componentes del conocimiento del profesor para la enseñanza de contenidos matemáticos diversos a nivel secundario o de bachillerato (Sosa y Carrillo, 2010; Rojas, Flores y Carrillo, 2013; Espinoza-Vázquez, Zakaryan y Carrillo, 2018; Vasco y Climent, 2018) y también el nivel primario (Ball y Bass, 2003; Ball et al., 2005; Hill, Rowan y Ball, 2005; Ball et al., 2008; Hill et al., 2008; Taylan y Ponte; 2016; Zarkayan et al., 2018). Algunos de ellos se han centrado en la enseñanza de la geometría (de Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015; Hernández y Lizarde, 2015; Carreño y Climent, 2019), incluso focalizándose es aspectos específicos de su génesis como lo son los registros de representación semiótica (Dallemolle, Oliveira Groenwald y Moreno Ruiz, 2014) y la complementariedad/articulación entre enfoques -sintético y analítico- en su enseñanza (Gascón, 2002, 2003; Regner y Rodríguez, 2016).

Asimismo, son escasos los estudios que centran su indagación en el conocimiento requerido para la enseñanza de la geometría, particularmente en la fase de inicio de su construcción, en la formación inicial o en sus prácticas como nóveles (Sgreccia y Massa, 2012; Henríquez y Montoya, 2015; Autor 1 y Autor 2, 2017; Schaefer y Sgreccia, 2019).

Si bien a partir de estos estudios se ha indagado en torno a la temática de interés, el desafío persiste en cuanto a que no está delimitado con absoluta claridad qué es lo que debe saber un profesor en Matemática para poder impartir una enseñanza de calidad. En una conferencia central del *XIII International Congress on Mathematical Education*, Ball (2017) sugiere que lo que se necesita es más claridad acerca de lo que se conoce y lo que se hace con la Matemática al interior del trabajo matemático de enseñar. Es por ello que, en este estudio, se intenta realizar una aproximación a ese conocimiento desde la observación de prácticas reales en torno a la geometría analítica en las clases de formación de profesores, donde dicho conocimiento se está gestando para luego ser puesto en acción. Particularizando la mirada en la formación que se ofrece en el PM, esto permitirá describir los matices específicos que adquiere la configuración de tal conocimiento en los futuros profesores.

3. MARCO TEÓRICO

Las investigaciones impulsadas desde mediados de la década de 1980 han intentado dilucidar la existencia de un tipo especial de conocimiento requerido para la enseñanza. Shulman (1986) es el primero en reconocer una especie de amalgama entre materia y pedagogía que no estaba siendo considerada, a la que denominó *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (*PCK*). Sostiene que la clave del conocimiento de un profesor está en la intersección entre la materia y la didáctica, que se traduce en la habilidad para transformar el contenido a la diversidad de estudiantes (Shulman, 2005).

Reorientando esta línea de investigación iniciada por Shulman, el grupo de investigadores de la Universidad de Michigan se ha centrado en la indagación de lo que abarca tal conocimiento para la enseñanza de la Matemática. Ball (1999) retomó el concepto de *PCK* introducido por Shulman señalando que la enseñanza de la Matemática entrelaza aspectos de la enseñanza y del aprendizaje con el contenido, por lo que requiere un tipo único de entendimiento propio de la esfera del profesor atravesada por una componente esencialmente matemática, un tipo de *conocimiento adicional* (Hill y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005). De una larga trayectoria en investigaciones especializadas en el tema deriva la propuesta del modelo *MKT*. Parte del valor que se atribuye a esta noción se basa en el hecho de que "es un modo de construir puentes entre el mundo académico de conocimiento disciplinario y el mundo práctico de la enseñanza" (Ball et al., 2008, p.398). Proponen, así, un conjunto de seis dominios que constituyen el *MKT* (Fig. 1) agrupados en dos grandes campos: *conocimiento de la materia* y *PCK*.

Por un lado, el *conocimiento común del contenido* (*CCK*) engloba un tipo de conocimiento que es utilizado en distintos ámbitos profesionales y científicos que se valen de la Matemática. Se pone en juego este tipo de conocimiento cuando, por ejemplo, se identifican respuestas correctas e incorrectas, se reconocen definiciones inapropiadas en los libros de texto, se utilizan términos y notaciones.

El *conocimiento especializado del contenido* (*SCK*) comprende acciones específicas de la tarea de enseñanza y que están particularmente atravesadas por la especificidad del contenido. Este tipo de conocimiento es demandado, por ejemplo, al dar justificaciones ante las preguntas de los estudiantes, al utilizar representaciones variadas para un mismo objeto matemático y al establecer conexiones entre ellas, al seleccionar tipos particulares de representaciones en contextos específicos. También, al aportar o interpretar significados en las explicaciones matemáticas, al desarrollar definiciones matemáticas apropiadas al contexto en el que se están utilizando, al extender conceptos y procedimientos evaluando su campo de validez, al ampliar casos, al hacer un uso crítico del lenguaje matemático, al elaborar preguntas matemáticamente productivas.

El *conocimiento especializado del contenido* (*HCK*) involucra conciencia acerca de cómo los tópicos matemáticos están relacionados entre sí e implica una visión de totalidad. Es el tipo de conocimiento que permite establecer las bases y fundamentos matemáticos de lo que se abordará posteriormente en el estudio de la Matemática escolar e, incluso, en niveles posteriores.

Por otro lado, el *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (*KCS*) integra el conocimiento acerca de la cognición de los estudiantes y permite anticipar acciones, dificultades, errores y aciertos. Se evidencia al elegir actividades que pueden ser de interés para los estudiantes, al interpretar sus emergentes, al identificar sus modos de pensamiento cuando, por ejemplo, se expresan mediante razonamientos incompletos haciendo un uso inadecuado del vocabulario matemático.

El *conocimiento del contenido y de la enseñanza* (*KCT*) incluye las formas didácticas de abordar el desarrollo de un contenido para hacerlo accesible a otros. Comprende el uso de recursos, el establecimiento de conexiones con ideas previas así como la organización de instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos.

El *conocimiento del contenido y del currículum* (*KCC*) encuadra decisiones y acciones acerca de los enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza en cierto nivel educativo. Se vincula con lo normado jurisdiccional e institucionalmente.

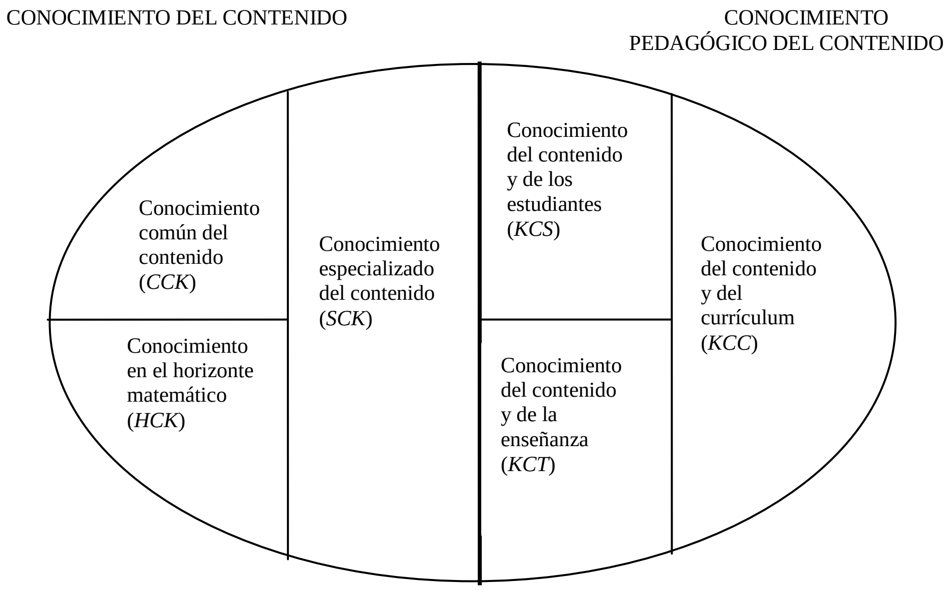


Figura 1. Campos y dominios del *MKT*.

En particular, el modelo cobra especificidad en este estudio al integrar dichos dominios con las particularidades de la geometría analítica que es el bloque temático sobre el que se centra el estudio. Un breve recorrido epistemológico desde los orígenes de la geometría analítica aporta algunos indicios acerca de la marcada diferenciación entre enfoques que se evidencia en la enseñanza de la geometría y que es reconocida por numerosos autores (Saorín-Villa et al., 2019; Regner y Rodríguez, 2016; Henríquez y Montoya, 2015; Ancochea, 2011; Gascón, 2002; Valencia, 1990).

La geometría analítica unifica el álgebra y la geometría sintética, al asociar números con puntos y ecuaciones con figuras. Se trata de una especie de diccionario entre el álgebra y la geometría (González Urbaneja, 2007). El descubrimiento de esta rama de la Matemática se atribuye a Fermat (1601-1665) y Descartes (1596-1650). Su surgimiento no habría sido posible sin los aportes de la geometría griega pero, fundamentalmente, no habría podido darse en paralelo con esta, pues requirió del aporte de muchas obras matemáticas posteriores entre las que se destacan los descubrimientos de Oresme en la introducción de sistemas de coordenadas y el álgebra simbólica de Vieta.

Los problemas de los griegos Apolonio y de Pappus fueron los que inspiraron tanto a Fermat como a Descartes a descubrir la otra cara del Principio Fundamental de la geometría analítica, al observar preliminarmente que una curva plana tiene asociada una ecuación en dos cantidades indeterminadas.

Fermat asocia curvas y ecuaciones en la resolución de problemas que involucran lugares geométricos definidos en un sistema de coordenadas por una ecuación indeterminada en dos incógnitas. Descartes introduce una estructura algebraica definida entre segmentos integrando aritmética y geometría. Complementariamente sus aportes posibilitan el paso de la deducción entre proposiciones (método sintético) a la solución de una ecuación (método analítico) habilitando una nueva lectura de la geometría euclidiana y potenciando su crecimiento (Ortega, 2013). No deja de ser, en esencia, una misma geometría que se vale de distintos métodos o enfoques. Asimismo, se cree que esta diferenciación entre métodos ha acarreado algunas consecuencias en su enseñanza.

Con la intención de focalizar la problemática de la falta de complementariedad o diferenciación entre enfoques que ha marcado el devenir de la geometría analítica, se retoman algunos fundamentos que se expresan en relación con la actividad curricular Geometría I, en los inicios de la formación en geometría analítica en estudiantes del PM.

En el programa de la actividad curricular se señala que la asignatura se compone de dos partes: geometría sintética y geometría analítica. Sucintamente, se listan los contenidos correspondientes a la parte de geometría analítica, de acuerdo a lo que se detalla en el plan de estudios 2002 del PM (Resolución C.S. Nº 217/02), en el marco del cual se desarrolla el estudio.

- vectores en el plano y en el espacio: bases y componentes;
- ecuaciones y lugares geométricos en el plano: recta, circunferencia, cónicas;
- curvas y superficies en el espacio: recta, plano, cuádricas.

Con respecto a la segunda parte de la materia (geometría analítica) se hace alusión a la incorporación de conceptos algebraicos para resolver los mismos problemas presentados en la primera parte, pero con estrategias diferentes, integrando el álgebra y la geometría. Se remarca que la intencionalidad en esta segunda parte está puesta en que el estudiante "logre interpretar un mismo concepto desde dos puntos de vista diferentes y logre valorar qué estrategia es la más conveniente para resolver un determinado problema" (p.2), lo que revela intención de abordar complementariamente los enfoques sintético y analítico de la geometría.

4. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

De la especificidad que cobra el modelo *MKT* al integrarse con contenidos de la geometría analítica surge el sistema de categorías teórico-metodológicas empleadas para el análisis (Tabla 1), en el que las subcategorías se constituyeron en los nexos operacionales entre el modelo teórico y el dato empírico a través del estudio. Es oportuno señalar que tales subcategorías son fruto de sucesivas etapas de refinamiento, a partir de observaciones minuciosas de prácticas de la enseñanza de la geometría analítica realizadas con anterioridad, como se reporta en Autor 1 y Autor 2 (2017).

Básicamente procura constituir un sistema lo menos ramificado posible pero que, a su vez, revele la multiplicidad de componentes que se hacen presentes en relación con el conocimiento del profesor puesto en acción en las situaciones analizadas.

Tabla 1
Categorías y subcategorías de análisis.

Categorías	Subcategorías
CCK	Tratamiento matemático del contenido
	Procesos de desarrollo matemático
	Lenguaje matemático
HCK	Conciencia de la relación entre tópicos matemáticos
	Encuadre histórico – epistemológico
SCK	Nivel de profundización matemática
	Representaciones matemáticas
KCT	Conexión con lo previo
	Utilización de recursos
KCS	Anticipación de las acciones de los estudiantes
	Interpretación de los emergentes de los estudiantes
KCC	Articulación horizontal
	Articulación vertical

Fuente: elaboración propia.

Para la categoría *CCK* se consideran, entre los aspectos de interés relativos al accionar del docente, los modos de abordaje (conceptual y procedimental) durante el tratamiento matemático del contenido, los procesos de desarrollo matemático (deducción, institucionalización) y el uso del lenguaje matemático específico como términos, notaciones y las correspondientes asociaciones entre nombre y representación gráfica de un objeto. En el tratamiento matemático del contenido adquiere especial importancia el nivel de precisión matemática que se fomenta.

En cuanto al *HCK*, se destacan las instancias del tratamiento matemático del contenido que denotan conciencia de la relación entre tópicos matemáticos y de la génesis de los objetos de estudio y que encuadran desde una perspectiva histórico-epistemológica la especificidad del tema. Se incluyen acciones de establecimiento de vinculaciones entre los dos enfoques de la geometría en tratamiento, así como de apreciaciones que involucran un conocimiento la Matemática más allá de lo que se está puntualmente enseñando. También comprende las bases y fundamentos de la geometría analítica a través de la Historia de la Matemática.

En relación con el *SCK* se incluyen aspectos que denotan nivel de profundización matemática en términos de los significados que se atribuyen a los asuntos en estudio y otros relativos a la ampliación de casos y contenido al consignar ejemplos variados o transferir ideas y nociones. También se atiende especialmente al uso de distintos registros de representación escrita (gráfico, coloquial y simbólico) y sus correspondientes conversiones. Se destacan las acciones en las que se recurre a más de un procedimiento de representación del objeto matemático, así como a

Recepción: 18/05/2020 *Aceptación: 30/06/2020*

interpretaciones que acompañan las representaciones gráficas y aportan a su comprensión. Además se consignan representaciones kinestésicas a través de movimientos de manos que portan intencionalidad docente.

En el *KCT* se consideran como subcategorías las acciones del docente que develan su conocimiento relativas al establecimiento de conexiones con lo previo y a la utilización de recursos. El establecimiento de conexiones con lo previo incluye la evocación de conocimientos ya trabajados, el uso de ideas recientes y la recapitulación de una serie de cuestiones abordadas con anterioridad. En cuanto a la utilización de recursos, se considera la generación de vinculaciones de lo que se está tratando con la realidad, a través de ejemplos, y el montaje de situaciones para el abordaje de algunos tópicos particulares. Se incluye también el uso de recursos, tanto habituales en el aula como especialmente montados.

En cuanto al *KCS*, un docente, entre sus tareas, suele anticipar acciones e interpretar emergentes de sus estudiantes. La anticipación de acciones se evidencia al prever errores y dificultades o al establecer supuestos en torno a la complejidad de lo que se está abordando (ausencia de complejidad, menor complejidad) y también al seleccionar ejemplos que se adecúen al nivel de abstracción de los alumnos. Se interpretan emergentes al potenciar respuestas desde la justificación o bien al considerarlas, incluso cuando la justificación es dada por el docente.

Para la categoría *KCC* se consideran como parte del accionar docente que refleja su conocimiento, el establecimiento de articulaciones tanto horizontales como verticales en el currículum. Se incluyen aquí las propiciadas con contenidos de otras asignaturas correspondientes al mismo año (horizontal) o con contenidos abordados en otro tramo (vertical), ya sea de la asignatura o del nivel secundario.

5. ENFOQUE METODOLÓGICO

La aproximación al proceso de construcción del *MKT* de la geometría analítica en estudiantes que proyectan ser profesores se realiza en tres fases en correspondencia con cada una de las asignaturas involucradas. En la fase 1 se observan y analizan las *prácticas de la enseñanza específicas iniciales* en la asignatura Geometría I. Se trata de prácticas específicas iniciales en tanto en esta asignatura de primer año de la carrera (PM) se cimientan las bases de la geometría analítica en la que se sientan los fundamentos disciplinares y epistemológicos relativos al tema. Aproximarse a las prácticas de la enseñanza de esta asignatura permite describir el modo en que se da la construcción del *MKT* geometría analítica en estudiantes del PM. El desarrollo de las clases de Geometría I se viene llevando a cabo, independientemente de esta investigación, mediante instancias de explicación guiada (en las que prevalece el discurso del profesor, las convencionalmente denominadas "de teoría") así como de trabajo en banco y de resolución de actividades de fijación (en las que se visibilizan las producciones de los estudiantes a través de sus consultas y de las intervenciones de los docentes para orientarlos; habitualmente se las reconoce como "clases de práctica").

En particular en las instancias de explicación guiada se acentúa la mirada en la actuación del docente a cargo, puntualmente en su discurso, en el que se revelan los modos de poner a disposición de los estudiantes oportunidades de aprendizaje matemático (Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2018) para indagar el modo en que se da la construcción del conocimiento. En las instancias de trabajo en banco, a partir del cúmulo de intercambios que se producen en las consultas se reconocen tres tipos distintos de intervenciones, dado que no son todas de la misma naturaleza.

La investigación sobre la asignatura Geometría I pone el foco en el accionar del docente, aunque no se descartan las producciones de los estudiantes, particularmente en el análisis de sus consultas durante las instancias de trabajo en banco. También resulta de interés indagar cómo los modos de iniciar búsquedas, de construir y de velar por la accesibilidad instrumentados por el docente de Geometría I son resignificados en instancias más avanzadas de la carrera. Si bien se asume que los aprendizajes no son consecuencia inmediata de la enseñanza (Ball, 2017), se presume que el trabajo sostenido sobre el fortalecimiento de la formación que se ofrece en el PM, en términos de condiciones institucionales y, en particular, del conocimiento puesto en acción por los docentes formadores, podría significar un robustecimiento del *MKT* de los futuros profesores.

De este modo, en las fases 2 y 3 se estudian los *desempeños alcanzados por estudiantes de la carrera sobre tramos intermedio y final* de la misma en las asignaturas Práctica de la Enseñanza II (PEII, primer semestre de tercer año) y Residencia (cuarto y último año de la carrera), respectivamente. Resumidamente importa reconocer elementos de las producciones de los futuros profesores en instancias intermedia y avanzada de la carrera para obtener información acerca del proceso de apropiación del *MKT* de la geometría analítica. En estas asignaturas realizan, entre otras, actividades que promueven el análisis y la reconstrucción de actuaciones propias del quehacer docente referidas a geometría analítica.

Así se constituyen en actores fundamentales de este estudio docentes y estudiantes de las tres asignaturas involucradas.

El diseño de la investigación responde al de un estudio de caso: el PM, centrado en la configuración del *MKT* de la geometría analítica. El caso es específico y a la vez complejo, y tiene interés por sí mismo, más allá de otros casos (Stake, 1999). Develar qué hacen los formadores de formadores para acompañar la gestación de las bases de la construcción de dicho conocimiento en futuros profesores en Matemática y cómo se configura dicho conocimiento durante el proceso de formación de un profesor, ha sido el objeto central del estudio. Al concebir que dicho conocimiento se constituye desde la praxis, como síntesis de teoría y práctica contextualizadas, que integran conocimientos matemáticos y pedagógico-didácticos en prácticas de enseñanza, el caso adquiere especificidad e interés por sí mismo. La complejidad es propia de los fenómenos didácticos en su contexto natural, de allí que se procure develar los "significados que las personas atribuyen a eventos y objetos, en sus acciones e interacciones dentro de un contexto social" (Moreira, 2009, p.25).

En particular, se trata de un estudio intrínseco de caso dado que tiene interés por sí mismo, más allá de otros casos. Aunque cabe advertir que, si bien la generalización no está entre las prioridades, los resultados pueden proporcionar categorías pertinentes para analizar otros casos en situaciones semejantes (Ander-Egg, 2003), como son otros Profesorados universitarios en Matemática.

La investigación tiene un enfoque eminentemente cualitativo, que resulta apropiado debido a que se analizan los procesos involucrados de producción y apropiación del conocimiento (Bravin y Pievi, 2008). Particularmente, develar cómo se configura el *MKT* de la geometría analítica, durante el proceso de formación de un profesor, requiere de estudios situados, que centren la indagación en los hechos y los significados que se les atribuyen, para fortalecer la aproximación que pueda hacerse al objeto de interés.

El alcance es principalmente descriptivo, dado que se especifican las características relevantes del caso en cuestión de acuerdo a las categorías y subcategorías de análisis (Tabla 1). La investigación es de tipo empírica no experimental en las fases 1 y 3, porque se analizan los fenómenos tal como se dan en su contexto natural, y cuasiexperimental en la fase 2, en la que se lleva a cabo una experiencia intencionalmente diseñada con un grupo de estudiantes ya constituido. El estudio es transversal, debido a que se recolectan datos con simultaneidad y en instancias puntuales (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), aunque procura tener indicios de los procesos involucrados, registrándose tres momentos diferentes en la fase 1 y convocándose a un mismo grupo de estudiantes con un año de diferencia en las fases 2 y 3.

En efecto, las categorías y subcategorías de análisis guían el abordaje a lo largo de las tres fases delimitadas para el estudio. A partir del adentramiento en la información registrada de manera exhaustiva, proveniente de audios, archivos y anotaciones, se identifican segmentos de acuerdo al significado que revisten y se establecen asociaciones conceptuales entre el marco teórico y el campo empírico, a través de lo consignado en la Tabla 1.

Metodológicamente, se recurre a la integración de diversas técnicas para aportar riqueza, amplitud y profundidad a los datos recolectados durante la indagación (Hernández et al., 2010) de manera tal de entretejerlas convenientemente con las categorías, los objetivos y los actores involucrados. La técnica de procesamiento de la información predominante es la de análisis del contenido (Ander-Egg, 2003) mediante la cual se refinan los agrupamientos conceptuales en pos de lograr una aproximación integral al fenómeno estudiado.

6. FASES DEL ESTUDIO

En la *Fase 1*, se aplica la técnica de observación directa no controlada, no mediada y no participante de nueve clases de la asignatura Geometría I, con la intención de acceder a la situación investigada en toda su complejidad y en el momento en que los acontecimientos suceden, sin artificios ni simplificaciones (Marradi, Archenti y Piovani, 2007).

Las observaciones se efectúan de manera intencionalmente discontinua (inicio, intermedio, final) a lo largo del segundo cuatrimestre (desarrollo de "geometría analítica", siendo en el primero "geometría sintética") para tener un espectro variado de clases en torno a la temática de interés. Los actores observados son los tres docentes que conforman la cátedra (D1, D2 y D3) y un grupo de estudiantes que varía entre de 30 a 20 a media que va transcurriendo el cuatrimestre. Los acontecimientos se desarrollan en su contexto natural, sin modificaciones en las actividades, horarios, docentes o materiales por el hecho de haber estado realizando esta investigación.

Cada una de las clases observadas constituye la *unidad de análisis*, siendo subunidades los segmentos en los que se reconocen significados asociados a las categorías de análisis. Concretamente en este estudio tales segmentos están conformados por los actos de habla o fragmentos de actos de habla emitidos en el transcurso de la clase y se denominan *mensajes* (Coll, Colomina, Onrubia y Rochera, 1992). Debido a la densidad de los datos involucrados en esta fase del estudio, se hace un agrupamiento en subunidades de análisis de orden superior a los mensajes: las *configuraciones de mensajes* (CM; Coll et al., 1992). Las mismas se delimitan de acuerdo al contenido matemático de referencia, resultando en un total de seis, tres, cinco, cuatro, tres, cuatro, dos, tres y dos para cada una de las nueve clases observadas, respectivamente.

En la *Fase 2*, con el fin de obtener indicios del proceso de configuración del *MKT* de la geometría analítica en estudiantes de PEII, se observan dos clases de manera directa, no controlada, no mediada y con participación moderada (Spradley, 1980, citado en Marradi et al., 2007). Durante dichas clases, los 15 estudiantes (A1 a A15) que cursan la asignatura (distribuidos en cuatro grupos: G1 a G4, espontáneamente por ellos formados) trabajan en torno a la resolución de un problema geométrico ("problema de la escalera") que puede ser abordado utilizando tanto técnicas sintéticas como analíticas. Cabe aclarar que, entre las actividades que se realizan en la asignatura se encuentran: análisis interpretativo-crítico de documentos curriculares, específicamente del eje que incluye tópicos de geometría analítica (entre otros), resolución de problemas así como simulación de clases que propenden a trabajar con los mismos, criterios con relación al empleo de recursos didácticos variados, etc.

> *Problema de la escalera. Una escalera que tiene una longitud de 2 metros está apoyada por su extremo superior a una pared vertical y su extremo inferior está situado en el suelo (la pared y el suelo forman un ángulo recto). ¿Cuál es la figura que describe el punto medio de la escalera, al resbalar y caer esta?*

Primeramente, los grupos resuelven el problema de la escalera y elaboran un informe en el que incluyen su resolución intercalándola con intervenciones específicas que realizarían en una instancia de socialización de la actividad con estudiantes de los últimos años del nivel secundario. La resolución está conformada por una instancia de conjetura -valiéndose de algún recurso didáctico- y otra de demostración -debiendo presentar dos formas que consideren diferentes entre sí-.

En el segundo encuentro cada grupo simula una parte de la explicación, previamente asignada por las investigadoras (procurando diversidad de resoluciones en el grupo-clase). Posteriormente se realizan intercambios intencionalmente promovidos, en relación con la identificación de rasgos sintéticos y analíticos en las demostraciones, así como las ventajas y desventajas del uso de recursos digitales para la conjetura del problema. Finalmente se presenta un cuestionario retrospectivo de la experiencia, que los grupos responden en forma diferida vía web, focalizándose en lo trabajado por su equipo (los dominios entre paréntesis se indican aquí, no en el instrumento oportunamente aplicado).

¿Para abordar qué concepto matemático consideran que podría ser pertinente la actividad propuesta? ¿Qué otros contenidos matemáticos surgieron en las demostraciones realizadas? (CCK)
¿Con qué contenidos posteriores puede estar vinculado este concepto, en la Matemática escolar del nivel secundario o superior? (HCK)
¿Por qué consideran potentes a sus formas de explicación? (SCK)
¿En qué cuestiones se detuvieron en la resolución atendiendo a que la explicación sea dirigida a estudiantes de secundaria? (KCS)
¿Mediante qué modalidad trabajarían esta actividad con alumnos de secundaria?, ¿y en qué momento del proceso de construcción del concepto mencionado en el primer ítem (contrucción, elaboración, ejercitación, aplicación)? (KCT)
¿Qué contenidos previos se requieren para resolver la actividad tal como ustedes lo hicieron? ¿Para qué año escolar resultaría adecuado esa forma de resolución? ¿Cómo se vincula con el enfoque predominante esta última respuesta? (KCC)

En la *Fase 3* se procura dar completitud al proceso de construcción en que se centra este estudio. Para ello, se analizan narrativas de desempeño de estudiantes que se encuentran en el tramo final de la carrera, cursando la asignatura Residencia. Puntualmente se consideran las producciones de las tres residentes (sobre un total de seis) que realizan su experiencia de práctica docente en el nivel superior en comisiones de Álgebra y Geometría Analítica en la formación básica de ingenieros (las otras tres lo hacen en Análisis Matemático).

Las narrativas se producen en el contexto de la cátedra de Residencia, independientemente de esta investigación, en tanto dispositivo potente de formación docente en el campo de la práctica (Martín, 2014). Las residentes relatan sus intercambios con los estudiantes de Ingeniería, en torno a consultas que les efectúan mientras se encuentran resolviendo actividades matemáticas en clase. Así, las narrativas son elaboradas a modo de registro escrito de sus experiencias de práctica, en el momento en que acontecen los intercambios. En sus escritos las futuras profesoras seleccionan de modo subjetivo qué decir, sobre qué incluir un mayor detalle y también qué omitir.

Con la intención de nutrir esta información con la voz de las participantes, se efectúa un grupo enfocado con las tres residentes quienes, cabe recordar, habían participado de la experiencia en la asignatura PEII durante el año anterior (Fase 2). Se les formulan preguntas abiertas disparadoras de reflexión en torno a tres cuestiones focales: experiencia de exposición de la resolución de una actividad en el pizarrón, significados construidos en relación con la actividad de PEII y proyección a futuro sobre la profesión docente.

Foco 1:
¿Qué contenidos se ponen en juego al resolver los ejercicios? (aludiendo a tres puntuales por ellas recientemente trabajados en las comisiones respectivas). ¿Con qué conocimientos previos mínimos debe contar un estudiante para poder "acceder" al ejercicio, para poder interpretar lo que pide la consigna, para poder "encararlo"? (CCK y KCC)
¿Qué dificultades previeron que podrían presentar los estudiantes al enfrentarse a este ejercicio?, ¿cómo pensaron atender a dichas dificultades?, ¿en el momento de la resolución surgieron dificultades que no habían previsto?, ¿cómo las atendieron? ¿Hubo devoluciones o aportes específicos por parte del coformador (docente a cargo del curso donde realizan sus prácticas)? (KCT y KCS)
¿Qué recursos o materiales utilizaron para acompañar la resolución?, ¿pensaron en otras opciones?, ¿por qué eligieron esos entre otros posibles?, ¿qué aportó el material utilizado a la resolución de la actividad? (KCT y KCS)
Foco 2:
En la discusión posterior a la simulación de la resolución del problema de la escalera, se les había solicitado que decidieran si las resoluciones propuestas se enmarcaban en un enfoque sintético o analítico.
¿En qué enfoque enmarcarían estas resoluciones? (se espera que identifiquen rasgos de uno y otro enfoque, sino, se podrían señalar algunos, a modo de ejemplo).
¿Consideran que la complementariedad de los enfoques sintético y analítico es un aspecto logrado en las resoluciones por ustedes propuestas? De lo contrario, ¿cómo potenciarían dicha complementariedad?, ¿qué se perdería (en cuanto a riqueza de aprendizajes) si la resolución se realiza desde un enfoque puramente analítico? (SCK y HCK)
¿Podrían identificar, entre las pensadas, preguntas orientadoras de la resolución que apunten a recuperar la complementariedad de los enfoques? Si es así, ¿cuáles? De lo contrario, ¿cuáles podrían formular para enriquecer la resolución propuesta en tal sentido? Si tuvieran que seleccionar preguntas orientadoras que puedan reconocer como "representantes" de la resolución, como aquellas que, al leer una a continuación de la otra, les dan una idea de "por dónde va la resolución", ¿cuáles elegirían?, ¿por qué? Leer la secuencia completa de preguntas. (SCK y HCK)
¿A qué creen que se debe la clasificación obtenida? (luego de compartir una clasificación realizada por las investigadoras). Ustedes pensaron distintas formas de resolución para el ejercicio expuesto, ¿en qué sentido consideran que dichas resoluciones son diferentes entre sí?, ¿podrían reconocer algún

contenido-eje de las resoluciones presentadas?, ¿cuál/es? (SCK y HCK)
Foco 3:
¿Qué creen que les permitirá, en su futuro desempeño como docentes, el poder llevar a cabo este nivel de síntesis en el análisis de resoluciones, ya sea a través de preguntas orientadoras representantes o contenidos-eje? (SCK, HCK y KCT)
¿Qué consideran que se apropiaron del tema a partir de su práctica de Residencia (que posiblemente antes no estaba suficientemente internalizado en términos de "conocimiento matemático para la enseñanza")? (CCK y SCK)

Cabe advertir que reconocer indicios de activación de los dominios del *MKT* de la geometría analítica requirió de un trabajo diferenciado de acuerdo al tipo de información recolectada en cada fase. La información relativa a las tres fases del estudio se resume en la Tabla 2.

Tabla 2
Técnicas, participantes e instrumentos implicados en cada fase.

Fases	Técnicas	Participantes	Instrumentos
1	Observación de clases	Docentes de Geometría I	Registro fiel de lo acontecido a partir de notas de campo y archivos de audio
2	Observación de clases	Estudiantes de PEII	Registro fiel de lo acontecido a partir de notas de campo y archivos de audio
	Análisis documental		Producciones escritas de los grupos de alumnos, en respuesta a una consigna intencionalmente propuesta
	Cuestionario abierto		Protocolo de preguntas que se responde por escrito de manera grupal diferido vía web
3	Análisis documental	Estudiantes de Residencia	Producciones escritas de las tres residentes consistentes en las narrativas de sus desempeños en el nivel superior
	Grupo enfocado		Protocolo de preguntas que sirven de disparadoras de la reflexión conjunta y se basan en sus producciones escritas

Fuente: elaboración propia.

Para sintetizar los hallazgos del estudio se recorren, a continuación, las tres fases.

7. FASE 1

La información recabada a partir de la observación de las nueve clases de Geometría I del PM se procesa en dos etapas (micro y macro), que conllevan distintos niveles de identificación del conocimiento del profesor involucrado en cada actuación.

En una primera etapa (*nivel micro*), se realiza un análisis pormenorizado del contenido del texto de campo delimitando, para cada clase, configuraciones de mensajes en relación con el contenido matemático de referencia (hubo un total de 32 CM) y reconociendo modalidades correspondientes a los dominios del *MKT* (Tabla 1) al interior de cada CM.

En todas las clases se reconocen tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. En el inicio se establecen conexiones con lo abordado en clases anteriores, recuperándose significados construidos. En el cierre se dan "pistas" de lo que se trabajará en próximas clases o se plantean cuestiones organizativas de la materia. En el desarrollo se reconocen tres tipos de configuraciones en correspondencia con las instancias observadas en las clases de Geometría I:

- *Explicación guiada* (26 CM; instancias predominantes dentro del conjunto de clases observadas, en las que el docente a cargo -D1- desarrolla los contenidos ante el grupo-clase). A continuación se las enumera, siendo de 1 a 6 de la clase 1, 7 a 9 clase 2, 10 a 13 clase 3, 14 a 17 clase 4, 18 a 20 clase 5, 21 a 24 clase 6, 25 clase 7 y 26 clase 8.

1. Idea global de la esencia de la geometría analítica
2. Asignación de coordenadas
3. Procedimiento base para la correspondencia entre la recta y el conjunto de los números reales
4. Análisis de la propiedad de biunicidad para la correspondencia entre la recta y el conjunto de los números reales
5. Procedimiento base para la correspondencia entre el plano y el conjunto de pares de números reales
6. Análisis de la propiedad de biunicidad para la correspondencia entre el plano y el conjunto de pares de números reales
7. Procedimiento base para la correspondencia entre el espacio y el conjunto de ternas ordenadas de números reales
8. Ejemplos de representación de un punto en el espacio
9. Ejemplos de lugares geométricos en el plano
10. Lugares geométricos en el espacio
11. Introducción a vectores
12. Propiedades de los vectores
13. Ángulo entre vectores
14. Independencia en la elección del origen común en la definición de ángulo entre vectores
15. Suma de vectores
16. Propiedades de la suma de vectores
17. Producto de un número por un vector
18. Ecuaciones paramétricas de la recta en el plano
19. Posiciones relativas entre rectas en el plano dadas sus ecuaciones

20. Ecuación cartesiana de la recta en el plano
21. Equivalencia entre las distintas formas de la ecuación de la recta en el plano
22. Búsqueda del circuncentro de un triángulo en forma algebraica
23. Distancia de un punto a una recta en el plano
24. Desigualdades lineales en dos variables
25. Reflexión sobre significados construidos
26. Superficies cuádricas. Estudio de casos

- *Trabajo en bancos* (4 CM; promovidas por los ayudantes de cátedra -D2 y D3-), en las clases 3, 7, 8 y 9.
  3-CM2, 7-CM2, 8-CM1, 9-CM2
- *Resolución de actividades de fijación en el pizarrón* (2 CM; a cargo de D2 o D3), en las clases 8 y 9.

En un nivel de análisis *micro*, para ejemplificar el contenido de las configuraciones de *explicación guiada*, se muestra un esquema de síntesis de la quinta configuración de mensajes de la clase 1 (Fig. 2).

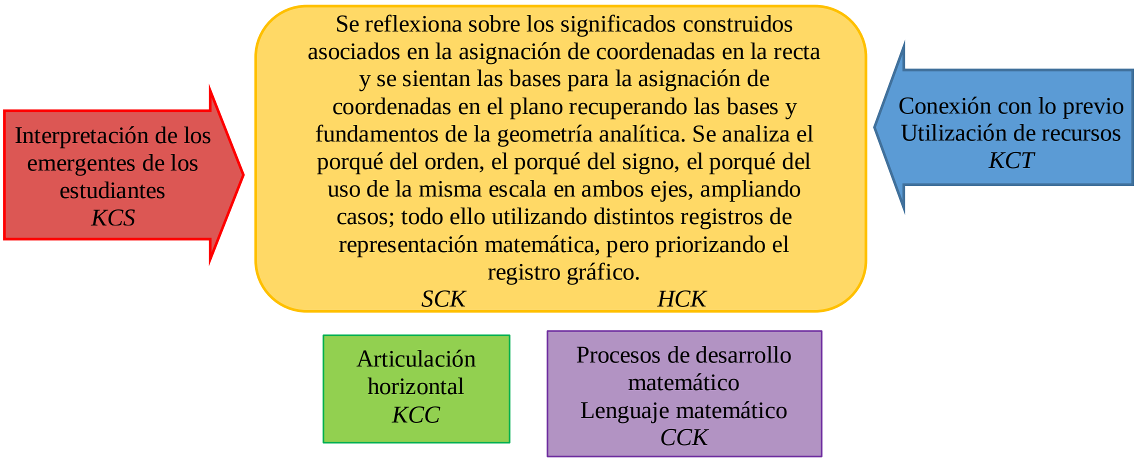


Figura 2. CM5 – Clase 1.

En estos esquemas (se realiza un esquema por CM), se otorga centralidad a los dominios *SCK* y *HCK*, debido a que se hacen notablemente presentes en cuanto a variedad y cantidad de subcategorías asociadas a los mismos que se reconocen, vinculándose entre sí en el discurso del profesor. Asimismo, el aporte de activaciones de los demás dominios y el modo en que se entrelazan con el *SCK* y *HCK*, complementa el núcleo central mostrando la diversidad de componentes del conocimiento de las que se vale el profesor que guía las explicaciones en las clases de Geometría I. A modo de ejemplo, se muestra un extracto correspondiente a la CM5 de la Clase 1 que intenta mostrar cómo se van entretejiendo las vinculaciones resumidas en la Fig. 2.

> *1-276-D1: (…) [Entonces, elegimos dos puntos tal que tengo la función longitud, entonces para no hacer todo mil veces vamos a usar lo que ya sabemos en la recta. Podemos dar en r y s sistemas de coordenadas (mientras escribe en el pizarrón) tales que O tenga coordenada 0, P_1 tenga coordenada 1 en r y O tenga coordenada 0 y P_2 tenga coordenada 1 en s (…) **KCT: conexión con lo previo**].*
> *1-278-D1: (…) Bueno, de qué manera darían ustedes coordenadas ahora rápidamente a un punto Q cualquiera que esté por acá (mientras dibuja el punto) y de qué manera se les ocurre cómo dar, que ya lo han hecho, coordenadas a un punto cualquiera del plano.*
> *1-279-A: Para hallar la coordenada de r, busco la recta perpendicular…*
> *1-280-D1: [Bien, trazo una recta perpendicular a r que pase por Q, esa recta es única y la va a cortar a r en un punto que podemos llamar A, ¿bien? Y hago lo mismo con s, trazo una recta perpendicular a s que pase por Q y va a cortar a s en un punto B (mientras dibuja) **SCK: representaciones matemáticas**], ¿bien? Este punto A tiene una determinada coordenada en r y este punto B tiene una determinada coordenada en s, y entonces, ¿qué coordenadas le doy a Q?*
> *1-281-A: ¿$(A; B)$?*
> *1-282-D1: Sí, la coordenada de A y la coordenada de B, que todavía no les puse nombre. (…) [En r, A tiene una coordenada x para un sistema que tenga a P_1 con coordenada 1 y en s, B tiene coordenada y, ¿bien? Entonces, decimos que Q tiene coordenadas $(x; y)$, ¿bien? **SCK: representaciones matemáticas**], [¿vieron ya producto cartesiano en Álgebra?, ¿sí?*
> *1-283-A: Ayer.*
> *1-284-D1: ¿Ya están con relaciones? Bueno, perfecto. Los pares se llaman, ¿cómo se llaman estos pares?*
> *1-285-A: Ordenados.*
> *1-286-D1: Ordenados **KCC: articulación horizontal**]. [El par es ordenado, quiere decir que tiene que respetar un orden, no es lo mismo $(x; y)$ que $(y; x)$, ¿bien? Entonces en la interpretación de las coordenadas tenemos que tener en cuenta varias cosas, primero que son coordenadas respecto de un origen, respecto de dos rectas que yo fijé como referencia y que las tengo que leer en orden la x va a representar la primera coordenada y la y siempre la*

segunda. La x en nuestra convención representa el desplazamiento horizontal y la y representa el desplazamiento vertical. ***HCK: bases y fundamentos de la geometría analítica****] ¿Cómo se llaman?, ¿tienen idea? La primera, la coordenada x, ¿se llama?*
1-287-A: Abscisa.
1-288-D1: Abscisa, ¿esa sería la abscisa?, ¿y la y?
1-289-A: Ordenada.
1-290-D1: Ordenada, bien. [Bueno, a la recta r la vamos a llamar eje x, obviamente, y a la recta s la vamos a llamar eje y, ¿bien? Entonces ahora la correspondencia biunívoca con los puntos del plano está dada, ¿contra qué conjunto?, ¿cómo se llama el conjunto de pares ordenados de números reales? (…) Entonces queda definida una correspondencia, ahora entre el plano π y el conjunto $\Re^2$ tal que a cada punto Q le corresponden las coordenadas $(x; y)$ de ese punto según el mecanismo que vimos ***CCK: procesos de desarrollo matemático****], ¿bien?*

La centralidad que adquieren los dominios *SCK* y *HCK* se ve, a su vez, reforzada a partir de un análisis holístico de lo acontecido (*nivel macro*). Este nuevo plano de análisis reveló la presencia de ciertos interrogantes centrales en cada CM, emitidos por el profesor a cargo D1. Estas interpelaciones clave iban generando nuevas búsquedas en la clase en su conjunto, constituyéndose en el hilo conductor y guía en las exploraciones que se iban abordando en cada momento. La emergencia de estos interrogantes y el rol "generador" que pudo asociárseles en la concatenación de ideas y tópicos a abordar en cada clase, llevó a identificarlas de un modo particular y especial: se las denominó *preguntas-generatriz* y es un constructo emergente del estudio. En la Fig. 3 se ejemplifica la secuencia de preguntas-generatriz identificadas en la Clase 3.

Estas secuencias de preguntas no solo permiten vislumbrar la estructura organizativa de las CM en torno al tratamiento matemático del contenido, sino que también sugieren rasgos de *SCK* y *HCK* consolidados en el docente que las efectúa. Las *preguntas-generatriz* revelan, en el docente, conciencia de totalidad para conectar las ideas más allá de lo que se está abordando en cada momento. A la vez denotan especificidad del contenido matemático en tanto apuntan a la construcción de significados mediante distintas perspectivas y modos de representación.

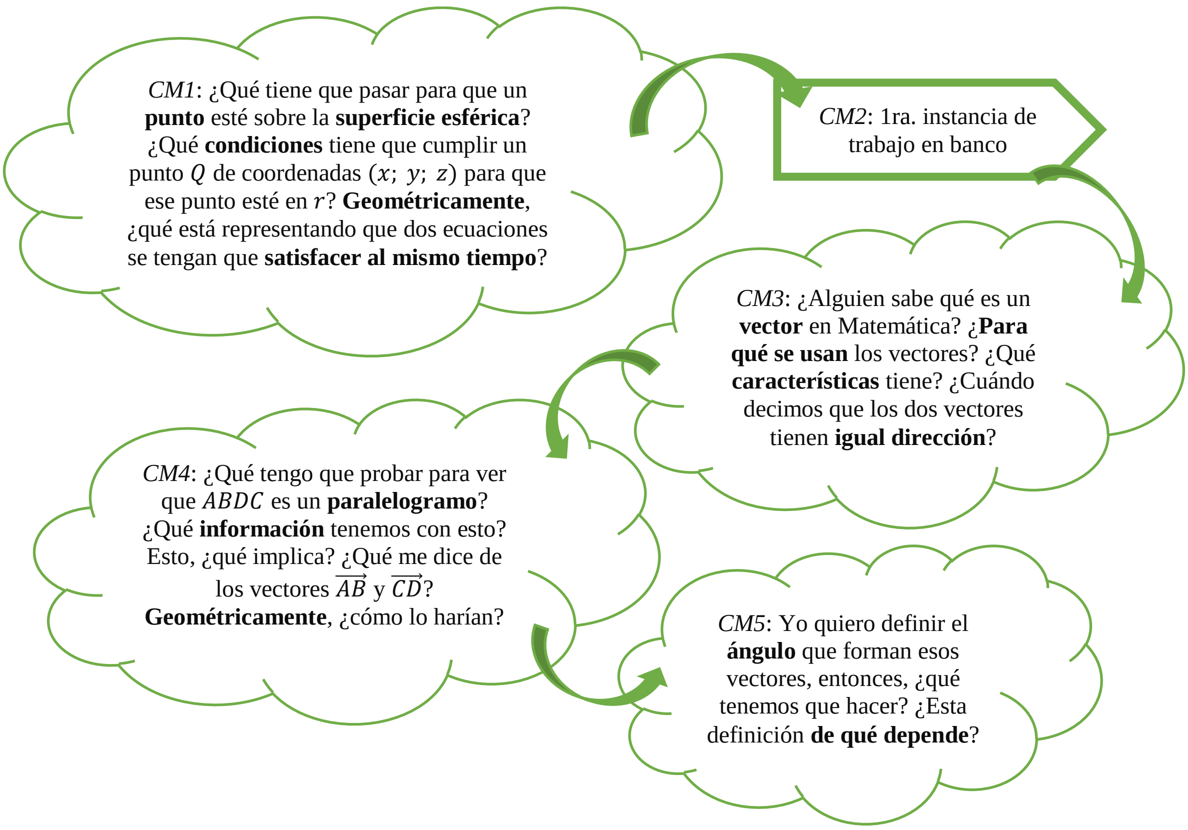


Figura 3. Secuencia de preguntas generatriz – Clase 3.

En las CM de *trabajo en banco* se identifican las intervenciones de los docentes en el acompañamiento a los estudiantes durante la resolución de las actividades. Entre los modos de intervención se detectan tres tipos diferentes de acuerdo al momento en que se efectúan y al tipo de preguntas a las que responden. En efecto, las intervenciones de *aplicación* se producen cuando el estudiante pregunta cómo transferir los conceptos y procedimientos abordados en una situación particular y responden a los interrogantes *¿cómo calcularlo?*, *¿cómo encontrarlo?*; las de *orientación* se producen cuando se reconoce un quiebre en lo que el estudiante está pensando o haciendo y atienden a las preguntas *¿cómo comenzar?*, *¿cómo seguir?*; las de *verificación* se efectúan cuando los estudiantes solicitan aprobación acerca de lo que están realizando y responden a *¿es correcto lo que hice/pensé?* Debido a que los datos recolectados no han permitido, a priori, reconocer CM en las instancias de trabajo en banco a causa de la diversidad de ritmos de los estudiantes (en un mismo momento, distintos estudiantes efectuaban consultas sobre distintos tópicos), se recurrió a una segmentación de la información que se basó en el desglosamiento de tipos de intervención para facilitar el reconocimiento de vinculaciones con el sistema de categorías delimitado.

En la Tabla 3 se comparte una síntesis de la clasificación de intervenciones por tipo con algunos extractos ejemplificadores.

Tabla 3
Tipos de intervenciones.

Tipo	Ejemplo
Aplicación	Un estudiante pregunta si no hay una forma sencilla de obtener un vector perpendicular a otro en el espacio, similar a la forma en que solían obtener un vector perpendicular a uno dado en el plano. D2 le responde que se puede aplicar la misma regla para dos de las tres componentes del vector y a la tercera ponerle 0 y luego agrega: "pero hay infinitos" (clase 8)
Orientación	Otro grupo de estudiantes consulta la siguiente actividad: *Determinar el intervalo de variación del parámetro t que describe el segmento de la recta* $x = 2 - t$; $y = 1 + 4t$, $t \in R$. *determinado por los puntos de intersección con los ejes coordenados.* D2 les escribe en una hoja mientras les explica que λ está variando y que habría que determinar para qué valor del parámetro se encuentran en el origen del segmento y para qué otro valor del mismo se encuentran en el extremo del segmento. D2 agrega que, una vez que determinen los valores del parámetro en cada caso, tendrán que decir que λ varía entre esos valores (clase 7)
Verificación	Otro estudiante le pregunta a D2 si representó bien dos puntos en el espacio (y le muestra su dibujo) y si es necesario que agregue las líneas de puntos como lo hacen en el pizarrón. Aparentemente la representación que realiza el alumno no es correcta ya que, al no considerar el paralelismo con los ejes al representar las coordenadas de los puntos (por no guiarse con las líneas de puntos), estos resultan un tanto imprecisos. D2 le indica cómo mejorar sus representaciones usando las líneas de puntos (clase 3)

Fuente: elaboración propia.

Una mirada de síntesis de lo acontecido en las cuatro sesiones de trabajo en banco señala un recorrido por las categorías y subcategorías del estudio a las que se han ido asociando las intervenciones. Así, se destacan instancias en las que los docentes invitan a hacer interpretaciones y representaciones gráficas o kinestésicas (*SCK: representaciones matemáticas*) y que ayudan a recuperar significados no evidentes desde el tratamiento analítico, al establecer vinculaciones con lo sintético. Esto revela un trabajo intencionado en la vinculación entre enfoques (*HCK: conciencia de la relación entre tópicos matemáticos*). También se identifica precisión en el desarrollo (*CCK: tratamiento matemático del contenido*), potenciación de justificaciones (*KCS: interpretación de los emergentes de los estudiantes*) y recuperación de ideas construidas con anterioridad (*KCT: conexión con lo previo*).

Sin embargo, se advierte que las relaciones que se pretende que el estudiante establezca son un tanto direccionadas (lo que limita su accionar).

Esto conlleva la búsqueda de alternativas de intervención con la intención de fortalecer la repregunta y la búsqueda de contraejemplos que se centren en lo que el estudiante está pensando para involucrarlo desde un rol más activo en la resolución. Se ejemplifica con una propuesta alternativa para la intervención de *aplicación* (Tabla 3, primera fila).

> *Se podría plantear una situación en la que los estudiantes deban buscar un vector perpendicular a uno dado en el espacio, recurriendo a la condición de perpendicularidad ya trabajada (en el sentido que aquí interesa: los vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo). Se esperaría que distintos estudiantes propongan distintos vectores. Luego se podría interrogar: ¿cuántos vectores perpendiculares a uno dado podemos hallar en el espacio?, ¿qué particularidad tienen esos vectores perpendiculares al dado?, ¿cómo podríamos representar gráficamente tal situación?*

Para cada CM de *resolución de actividades de fijación en el pizarrón*, la información se sintetiza de manera similar a las configuraciones de explicación guiada (Fig. 2) pero el esquema se centra en una imagen representativa (reproducida por las investigadoras) de lo que queda registrado en el pizarrón al resolver la actividad. En la Fig. 4 se ejemplifica con la primera CM de la clase 9 en la que se trabaja con intersecciones de superficies. En particular, aquí se muestra una captura representativa de la resolución de una actividad que involucra la búsqueda de ecuaciones de una circunferencia que se obtiene al intersecar una esfera con un plano.

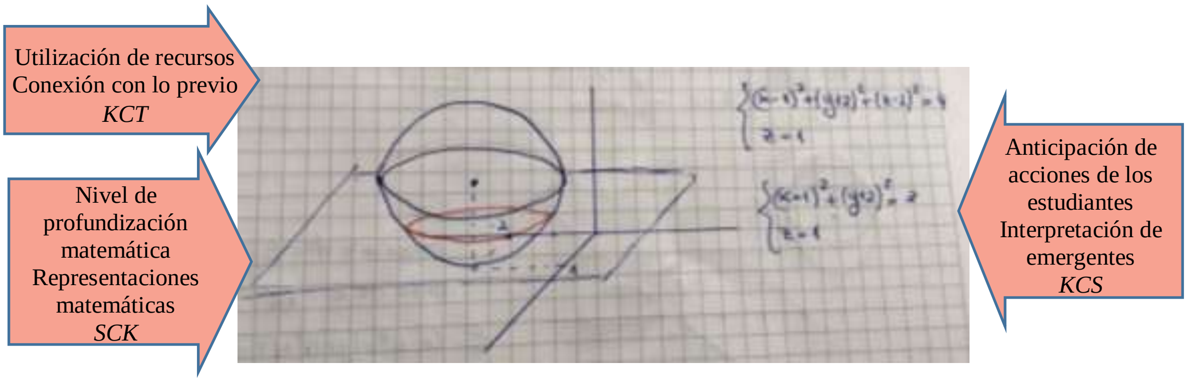


Figura 4. CM1 – Clase 9.

8. FASE 2

El estudio del desempeño de los estudiantes de PEII se centra en sus producciones grupales escritas de resolución del problema de la escalera y simulaciones de socialización con estudiantes de los últimos años del secundario. Se complementa con intercambios orales durante el proceso de resolución y respuestas retrospectivas a un cuestionario abierto. Del análisis de las cuatro conjeturas (una por grupo) y nueve demostraciones (dos por grupo; G4 hizo tres), se sintetizan rasgos del *MKT* de la geometría analítica que los estudiantes ponen en acción.

En la instancia de *conjetura* los grupos explicitan distintos momentos que podrían recorrerse para aproximarse a la misma (Tabla 4).

I: Imaginan la curva.
P: Proponen distintas curvas.
M: Manipulan un recurso.
R: Realizan el trazo sobre una hoja.
O: Obtienen la conjetura.

Tabla 4
Etapas de las conjeturas.

Grupo	I	P	M	R	O
G1	X	X	X	X	X
G2			X	X	X
G3			X	X	X
G4	X	X	X	X	X

Fuente: elaboración propia.

En el siguiente extracto del informe de G1 se recorren las etapas mencionadas.

> *D: ¿Qué es lo primero que pensaron cuando leyeron el problema?*
> *A: Un compañero pensó que era una hipérbola y para otro era ¼ de circunferencia.*
> *D: ¿Cómo hicieron para verificar cuál era la curva correcta?*
> *A: Utilizamos la caja de cartón como pared, una regla que representa la escalera, el escritorio como piso, y un cuadernillo en el cual, a medida que simulamos la caída de la escalera, marcamos en él, con una lapicera el recorrido del punto medio de la regla en cada posición.*
> *D: Bien, eso que hicieron es una representación del problema con elementos que conocemos y podemos manipular. ¿Y después cómo continuaron?*
> *A: Con los puntos que quedaron dibujados en la representación que explicamos anteriormente, intuimos que la curva que describe el punto medio de la escalera es ¼ de circunferencia.*

Por un lado, no todos los grupos explicitan la curva que se imaginaron en el primer acercamiento al problema y, por otro lado, el recurso manipulado varía de un grupo a otro. En todos los casos los recursos utilizados fueron manipulativos no digitales (Fig. 5). Por ello, luego de las simulaciones en clase, las investigadoras presentan un dispositivo alternativo mediante el software GeoGebra.

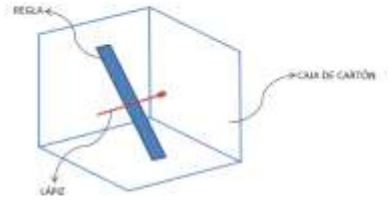


Figura 5. Imágenes representativas de los recursos utilizados por G3 y G4

Para el análisis de las nueve *demostraciones* se recorren los contenidos que son aludidos en cada una. Luego del recorrido es posible reconocer cuatro contenidos-eje a los que los grupos recurren en momentos neurálgicos de la demostración: trigonometría, rectángulo, semejanza y mediana (Tabla 5).

Tabla 5
Clasificación de las demostraciones.

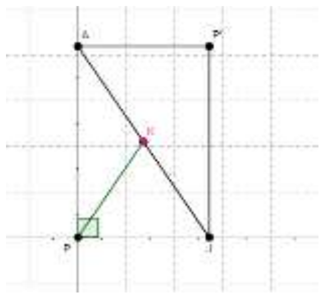
Trigonometría	Rectángulo	Semejanza	Mediana
G1	G3	G1	G2
G4	G3	G4	G2
		G4	

Fuente: elaboración propia.

Se comparte, a modo de ejemplo, una demostración realizada por G3 cuyo contenido-eje es *Rectángulo*.

A: Nosotros trazamos el segmento que une el punto de intersección de la pared y el piso, con el punto medio de la escalera en alguna de las posiciones.
D: Bien, ¿le pusieron algún nombre a esos puntos?
A: Sí, al punto de intersección de la pared y el piso P *y al punto medio que tomamos* K.
(El profesor representa en el pizarrón una posición posible de la escalera, traza el segmento que une el punto de intersección de la pared y el piso con el punto medio de la misma y va nombrando los puntos como los alumnos le dicen).
D: ¿Cómo siguieron?
A: Denotamos con la letra J *al punto de intersección del piso con la escalera y con* A *al punto de intersección entre la escalera y la pared.*
A: Sabemos que PAJ *es un triángulo rectángulo donde el ángulo* $APJ = 90°$*. Ahí observamos que el triángulo* PAJ *es la mitad de un rectángulo* $PAP'J$.

D: ¿Dónde marcaron P' *para formar el rectángulo que dicen?*
A: Trazamos una paralela a la pared que pase por el punto J *y otra paralela al piso que pase por el punto* A*, a la intersección de estas dos rectas la llamamos* P'.



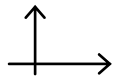
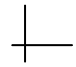
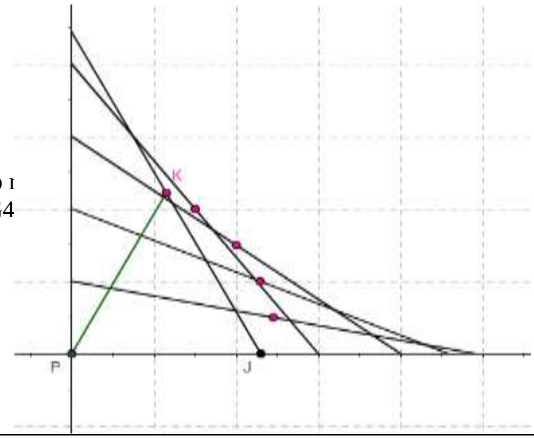
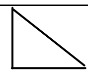
(Todo esto es representado por el profesor en el pizarrón a medida que los alumnos le cuentan).
D: ¿Cómo seguimos?
A: Las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en su punto medio. Entonces tenemos que AK = KJ = PK = $\frac{AJ}{2}$*. Como la escalera mide* $2m$*, la distancia del punto de intersección de la pared y el piso al punto medio es de* $1m$*. Así con cada triángulo que se forma con las distintas posiciones de la escalera. Por lo tanto, tenemos que la distancia a cada punto medio es* $1m$*. En consecuencia, la figura formada es un cuarto de circunferencia, porque todos los puntos medios en las distintas posiciones de la escalera están a la misma distancia del punto de intersección de la pared y el piso.*

Estos contenidos-eje están a su vez compuestos por temas puntuales que hilvanan el desarrollo. Por ejemplo, en G4-Trigonometría son:

- sistema de referencia
- asignación de coordenadas en el plano
- ángulos
- triángulo rectángulo
- razones trigonométricas
- posiciones relativas entre rectas
- operaciones entre segmentos
- identidad trigonométrica
- elementos de la circunferencia
- circunferencia como lugar geométrico
- arco de circunferencia

También se presta atención a la forma en que hacen uso de los ejes coordenados (Tabla 6).

Tabla 6
Usos de los ejes en las demostraciones.

Uso	Representación
Como sistema de referencia, para asignar coordenadas de puntos en el plano (G1, G4)	
Como sistema de referencia, pero luego se prescinde (G1)	
	
Como r... G3, G4 	
Ausente (solo triángulo rectángulo) (G2, G2)	

Fuente: elaboración propia.

A pesar de que en la actividad se pide que las demostraciones sean bien diferentes entre sí, la mayoría de los grupos (todos excepto G1) producen dos demostraciones de un mismo tipo. Incluso en la instancia de discusión posterior a la simulación de clase, se solicita a los estudiantes identificar sus resoluciones con alguno de los enfoques sintético o analítico; cuestión de la que emergen indicios de desconocimiento de lo que los mismos comprenden.

Luego de un recorrido global por las producciones de los estudiantes de PEII, en la Fig. 6 se sintetizan aspectos de los dominios del *MKT* de la geometría analítica que aparecen fortalecidos (en verde) y otros que requieren de cierta profundización (en rojo).

CCK Conjetura y demostración Contenidos matemáticos involucrados Precisión matemática y en el lenguaje Contenido matemático que podría abordarse a partir de la actividad	***SCK*** Claridad en las explicaciones Principios básicos de una buena explicación Desmenuzamiento de significados Distintos registros de representación Uso de ejes cartesianos	***HCK*** Contenidos posteriores Algunos no necesariamente se desarrollan con posterioridad Mirada global de resoluciones Distintos enfoques
KCS Adecuación al nivel educativo Previsión de errores y dificultades Resoluciones para el ciclo básico de la escolaridad secundaria	***KCT*** Elementos de una clase constructiva Uso de interrogantes para guiar Diseño de recursos manipulativos Uso de recursos digitales	***KCC*** Variadas vinculaciones con diferentes contenidos del diseño curricular prescripto Vinculaciones: contenidos previos necesarios - año de la escolaridad - enfoque abordado

Figura 6. Desempeño global de estudiantes de PEII.

En relación con el *CCK*, se parte del reconocimiento y caracterización de las instancias de conjetura y demostración como etapas diferenciadas en la resolución, lo que revela entendimiento matemático de la consigna dada. También se logra la identificación de contenidos matemáticos involucrados que fueron requeridos en las resoluciones y la precisión matemática y del lenguaje con que fueron abordados en la simulación de clase. Como debilidad se señalan algunas dificultades en la identificación de contenidos matemáticos que podrían introducirse a partir del problema propuesto.

En cuanto al *SCK*, se reconocen elementos que potencian sus formas de explicación sustentadas en las representaciones matemáticas y en el nivel de profundización matemática, tanto en las respuestas al cuestionario como en las simulaciones de clase. Se desmenuzan los significados de los tópicos matemáticos en tratamiento, se presenta diversidad de formas de resolución del problema de la escalera y se promueven representaciones de la situación en distintos registros. Se muestra, a modo de ejemplo, un extracto de simulación de G2 en la que se reconoce cierto detenimiento en la representación e interpretación gráfica de la situación.

> *A3: Y queríamos saber si* M [punto medio de la escalera] *tenía siempre la misma distancia a* A [punto intersección de la pared con el piso, en el plano representado]*, si medía siempre lo mismo.*
> *A1: En cualquier posición de la escalera, que* M *tuviera siempre la misma distancia.*
> *A4: Porque nuestra escalera acá está en esta posición (señalando la dibujada).*
> *A1: Sí.*
> *A4: Pero tal vez podría estar más inclinada, ¿sí? Y nuestro punto medio no sería este, sería por acá (y dibuja una nueva posición de la escalera señalando su punto medio). Depende de cómo hayamos puesto la escalera, la inclinación.*
> *A1: Pero nosotros queremos saber, o sea, siempre que la distancia del centro* A *al punto* M.
> *A4: Que sería, ¿qué cosa de la circunferencia?*
> *A2: El radio.*
> *A4: Sería el radio, muy bien.*

Como debilidad se advierte un uso poco intencionado de los ejes cartesianos, en tanto se representan como tales aún en casos en los que no son funcionales a la resolución (como se puede apreciar, por ejemplo, en la demostración compartida luego de la Tabla 5). Además, hay ausencia de una verdadera diversidad en las resoluciones con relación al contenido-eje de las mismas (como fuera indicado en la Tabla 5).

En vinculación con el *HCK*, los grupos identifican contenidos que podrían abordarse posteriormente a la introducción de los que se proponen con la actividad y otros que no, de acuerdo a las normativas curriculares. También, en el intercambio oral de discusión posterior a la simulación de las clases, se revelan algunas dificultades para hacer una mirada global de las resoluciones. Puntualmente, se aprecia con respecto al reconocimiento de la esencia de los enfoques geométricos utilizados en las demostraciones ligadas a reiterados indicios de desconocimiento de lo que comprenden los enfoques sintético y analítico de la geometría. A modo de ejemplo:

> *36-1A1: [analítico] por la aplicación de un teorema.*
> *43-1A2: Lo sintético hace referencia al dibujo y a la construcción.*
> *68-1A4: (...) la analítica usa más números.*
> *81-2A1: [lo analítico] es más de aplicar axiomas, teoremas… sin tanta construcción y más de sacar cuentas con números.*

Cabe señalar que este aspecto logra revertirse parcialmente en las respuestas al cuestionario que se aplica al finalizar la experiencia.

Acerca del *KCS*, las propuestas resultan adecuadas (contenidos, lenguaje) al nivel cognitivo de los estudiantes a los que fueron dirigidas; acerca de las que también se prevén errores y dificultades. Si bien muchas de las resoluciones podrían abordarse en los primeros años de escolaridad secundaria (cuestión que, a su vez es expresada por los grupos en respuesta a la consigna del cuestionario correspondiente a la categoría *KCC*), son capaces de identificar qué elementos clave de sus propuestas denotan haber tenido en cuenta particularidades de los sujetos destinatarios de las mismas.

Relativo al *KCT*, los grupos identifican elementos de una clase constructiva, no tan claramente efectivizados en la simulación de clase. También formulan interrogantes para orientar las construcciones y diseñan recursos manipulativos para la instancia de conjetura. Emerge como debilidad cierta falta de criterio ante el uso de recursos digitales con explicaciones poco fundamentadas acerca de sus desventajas en comparación con los recursos manipulativos.

En el *KCC*, si bien se establecen vinculaciones con contenidos previstos en el currículum jurisdiccional, en algunos casos no resultan óptimas con respecto al año de escolaridad al que estaba dirigida la resolución y el enfoque adoptado en relación con los conocimientos previos requeridos.

9. FASE 3

Para caracterizar el *MKT* de la geometría analítica en estudiantes que se encuentran en el tramo final de la carrera, se analizan las actuaciones que despliegan tres de ellos (R1 a R3), en el contexto de realización de sus prácticas de Residencia en el nivel superior. Se considera como material de análisis la atención de consultas relatadas en sus narrativas de desempeño, así como sus reflexiones acerca de exposiciones de explicación en pizarrón y de la actividad realizada el año anterior en PEII (Fase 2).

Para el procesamiento de las producciones escritas de las residentes se opera de manera similar al modo en que se realiza con las CM *trabajo en bancos* (Fase 1), pues los intercambios son del mismo estilo. En la Tabla 7 se ejemplifica con un par de intervenciones de *orientación* efectuadas por R1.

Tabla 7
Intervenciones de orientación de R1.

Tema	Intervención	Desenlace
Condición de perpendicularidad entre rectas dadas en forma explícita; reducción de variables en el planteo	Observación de datos del enunciado Búsqueda de una identidad trigonométrica que permita reducir las variables	Se sienten encaminados, lo van a completar luego
Ecuaciones paramétricas de un plano	Observación de datos del enunciado Comprobación de la condición que deben cumplir los vectores dados	Explican lo que sucedería si los vectores dados resultaran paralelos

Fuente: elaboración propia.

Se destaca que son numerosas las intervenciones en las que las residentes invitan a hacer interpretaciones y representaciones gráficas o kinestésicas (*SCK: representaciones matemáticas*) estableciendo vinculaciones entre la geometría “de las formas” y la “de las coordenadas” (*HCK: conciencia de la relación entre tópicos matemáticos*). Precisamente se vislumbra un tratamiento del contenido que contempla la complementariedad entre los enfoques sintético y analítico, provocada de manera intencional por las practicantes, tal como se muestra en el siguiente extracto.

> *R1-14:* ***(aplicación)*** *(...) Le propuse hacer un dibujo de la situación y le pregunté qué particularidad tiene la recta tangente a una circunferencia. Se dio cuenta entonces que el vector con origen en el centro de la circunferencia y extremo en el punto A (perteneciente a la misma) tiene que ser perpendicular a la recta por lo que de esa manera conseguía un vector normal.*

Se evidencian indicios de un interrogatorio didáctico: efectúan preguntas específicas (*SCK: niveles de profundización matemática*) que parten de donde están situados los estudiantes en la actividad, van al detalle y prevén eventuales descuidos, a la vez que se potencian sus aportes desde la justificación (*KCS: anticipación de las acciones de los estudiantes; interpretación de sus emergentes*). También se presentan instancias de recuperación de lo trabajado con anterioridad (*KCT: conexión con lo previo*) tal como se muestra en el extracto a continuación.

> *R1-4:* ***(orientación)*** *(...) Como olvidaron decir que debían comprobar que los vectores no sean paralelos se los recordé haciéndoles ver que si los vectores son paralelos es porque los puntos están alineados y en la introducción de ecuaciones paramétricas los puntos dados no están alineados. Rápidamente ellos me respondieron que entonces habría infinitos planos y que por eso necesitaban dos vectores no paralelos.*

Al adentrarse en las producciones de las residentes durante el grupo enfocado, se revela que ciertos aspectos han sido apropiados, reflejándose profundización en relación con su configuración del *MKT* de la geometría analítica en el tramo final de la carrera. Estos hallazgos se sintetizan en la Fig. 7.

En efecto, reconocen haber reforzado sus conocimientos matemáticos (*CCK*) luego de observar clases donde se desarrollan contenidos similares a los estudiados en Geometría I, en los inicios de su formación.

En relación con el *SCK*, son capaces de detectar contenidos-eje en sus resoluciones al transferir a las mismas la clasificación compartida por las investigadoras (Tabla 5) cuestión que se refleja en el siguiente fragmento de intercambio durante el grupo enfocado.

> *246-R1: Para mí, las resoluciones que yo tenía sí son distintas. Una podría estar en la categoría vectores que es una unidad que ellos dieron, la primera unidad y prestar atención a cómo oriento ese vector y ahí buscar el punto de intersección de la recta y el plano, que es totalmente distinto a igualar las distancias. En una el concepto-clave es saber cómo calcular la distancia de un punto a un plano, abstrayéndose de que tengo vectores y el otro, bueno, este punto con este no deja de ser un vector que tiene que tener la misma distancia (longitud), entonces tengo las tres condiciones de igualdad de vectores, entonces la clave está en eso. Igualdad de vectores y distancia de un punto a un plano y los pondría como en cuadritos separados (en columnas separadas en una tabla, refiriéndose a un modo posible de clasificarlas).*

También, en conexión con el *SCK*, reconocen haber previsto diversidad de representaciones en la planificación de sus propuestas, con especial detenimiento en las de tipo gráfico.

También, identifican preguntas efectuadas y otras posibles de ser formuladas para recuperar la complementariedad entre enfoques.

Figura 7. Aspectos profundizados del *MKT* de la geometría analítica en R1, R2 y R3.

En cuanto al *HCK*, a partir de una mirada holística de sus propuestas y preguntas planificadas, reconocen el aporte de ciertos interrogantes-clave para la comprensión global de las resoluciones y señalan momentos puntuales en los que se establecen vinculaciones sintético-analíticas.

En vinculación con el *KCS*, prevén dificultades de los estudiantes en la planificación, tienen en cuenta la posibilidad de potenciar justificaciones desde la repregunta y reflexionan sobre errores que surgieron en la implementación y que no habían sido previstos. Estos aspectos señalados se reconocen en el siguiente extracto ejemplificador del grupo enfocado.

> *86-R1: (…) Capaz que el no darle un valor específico al parámetro cuando das la ecuación paramétrica, que era lo que habíamos hablado (en la simulación en clase de Residencia) pero bueno, ellos no internalizan que acá con un valor del parámetro tengo ese punto y como que lo piensan y saben que ese valor es para un punto en especial pero no pasan eso a la notación que usan, entonces puede traer errores... pero no se dio en la resolución de esta actividad. Pero bueno, yo no reaccioné en ese momento, aunque sí lo había pensado en la clase de Residencia, y siempre está bueno hacerlo porque capaz que ellos saben de qué están hablando, pero para hacerlo claro para otro que lo está escuchando.*

Se identifican indicios de un *KCT* robustecido en la planificación de preguntas-guía, al recuperar conocimientos previos y al reconocer el aporte del uso de materiales variados. Esto último surge luego de intercambiar las experiencias entre residentes; inicialmente cada una se apega al estilo del docente de la cátedra en la que estaban realizando sus prácticas.

Por último, en relación con el *KCC*, se reconoce que los contenidos recorridos en las resoluciones propuestas corresponden al programa de la asignatura.

10. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha procurado describir el proceso de construcción del *MKT* de la geometría analítica, enriquecido por la aplicación de diversidad de técnicas e interpretaciones, en distintas instancias de la formación inicial que se ofrece en el PM.

En la Fase 1 se focaliza la mirada en la actuación de los docentes de la asignatura Geometría I. En su discurso -en especial en las instancias de explicación guiada- y en las interacciones que los mismos promueven con sus estudiantes, se logró reconocer que desde sus intervenciones intencionadas no solo enseñan geometría analítica. Estas intervenciones dejan traslucir otros componentes del conocimiento del profesor que se reflejan en la cantidad y diversidad de asociaciones con los dominios del *MKT* a partir del sistema de categorías y subcategorías delimitado (Tabla 1), que aportan en la cimentación de las bases en la construcción del conocimiento profesional docente en sus estudiantes. Se ha detectado, en este sentido, la centralidad que adquieren los dominios *SCK* y *HCK* en los inicios de la construcción del *MKT*. Los restantes dominios (*CCK*, *KCS*, *KCT* y *KCC*) completan el conocimiento puesto en juego en cada explicación, en cada pregunta que se formula para orientar búsquedas e indagaciones y complementan de manera dinámica el bloque central de conocimientos, al mismo tiempo que el *SCK* y el *HCK* se nutren de ellos (Fig. 8).

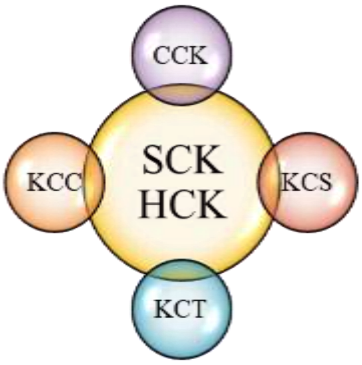


Figura 8. Configuración del *MKT* de la geometría analítica.

Estos hallazgos han colaborado en la descripción de las condiciones institucionales en las que se inicia la construcción del *MKT* de la geometría analítica en los futuros profesores (primer objetivo específico).

Sin embargo, al analizar cómo los aportes de un conocimiento robusto del profesor en los primeros acercamientos a la geometría analítica son apropiados y puestos en acción por los futuros profesores en una instancia intermedia del trayecto de formación (Fase 2), se reconoce que ciertos aspectos relativos al reconocimiento de los enfoques sintético y analítico de la geometría y de su complementariedad aún requieren ser profundizados y re-trabajados. Si bien desde el discurso del profesor y de las interacciones que se promueven se destaca la intencionalidad por enfatizar en la continuidad de los enfoques y el aporte que un abordaje complementario de los mismos brinda en la resolución de situaciones diversas (Gascón, 2002; Ancochea, 2011; Henríquez y Montoya, 2015), se percibe una escasa provisión de relaciones explícitas. Por ejemplo, desde la propuesta de actividades en las que se evidencien limitaciones de las técnicas sintéticas y, por lo tanto, se reconozca la necesidad de recurrir a las analíticas o en la que se establezcan relaciones explícitas entre enfoques (reconociendo cuando se está aplicando uno u otro; tal como se propone en las posibles líneas de acción de la Fig. 9). De este modo se fortalecería el *CCK* a la vez que el uso de representaciones variadas y el establecimiento de vinculaciones entre enfoques aportarían al *SCK* y *HCK*, robusteciendo el campo del *conocimiento de la materia.*

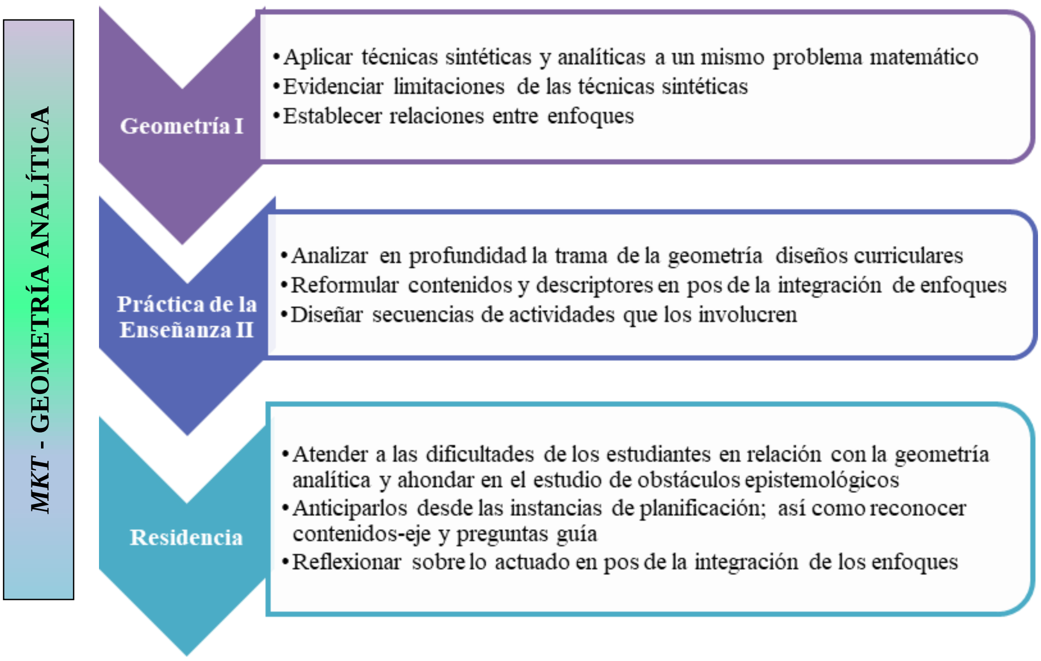


Figura 9. Posibles líneas de acción para fortalecer el *MKT* de la geometría analítica.

Asimismo, la gran diversidad de aspectos que se evidencian como fortalecidos en las producciones tanto escritas como orales de los estudiantes del PM en instancias intermedia y avanzada de su trayecto en la formación inicial indican que se ofrece una formación intencionada de la geometría analítica que, lejos de ser superficial en los términos en que lo plantean Ponte et al. (1998) y Corica y Marín (2014), tiende a sentar las bases en la construcción de un *MKT* robusto. En este sentido, los hallazgos compartidos en relación con las Fases 2 y 3 del estudio muestran indicios específicos de cómo se profundiza y acentúa el proceso de dicha construcción desde espacios curriculares que problematizan las prácticas de enseñanza (segundo objetivo específico).

Con la intención de aportar algunas líneas de acción que propendan al fortalecimiento de la formación que se ofrece en el PM, se delinean algunos aspectos a considerar en la formulación de propuestas formativas, en el contexto de las asignaturas involucradas en el estudio (Fig. 9).

En la obtención de resultados del estudio realizado adquieren especial relevancia la integración de lo esencialmente matemático y lo didáctico que demanda la tarea de la enseñanza y el impacto que la formación inicial tiene en la construcción de dicha amalgama (Ball et al., 2008) pues tal como señala Shulman (2005) es en la intersección entre la materia y la didáctica, donde aparecen indicios clave del conocimiento necesario para la enseñanza. Y, a su vez, la capacidad de los estudiantes para transformar sus conocimientos adquiridos en el campo disciplinar y en el campo pedagógico en conocimientos que integren ambos aspectos, da cuenta de una formación orientada a tal fin.

Para finalizar, se subraya que el estudio realizado intenta aportar a la vacancia de estudios empíricos sobre el conocimiento requerido para la enseñanza de la geometría. Asimismo, se procura realizar un aporte en la delimitación de componentes que configuran el *MKT* de la geometría analítica y en cómo los mismos se van construyendo y cimentando a partir de una formación matemática y didácticamente intencionada con el propósito de echar luz desde la investigación educativa, en sintonía con lo propuesto por Ball (2017), acerca de qué es lo que debe saber un profesor para sostener una enseñanza de la geometría analítica de calidad.

11. REFERENCIAS

Ancochea, B. (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.). *Un panorama de la TAD* (pp.533-551). Barcelona, España: Centre de Recerca Matemàtica. http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/Bernat-CITAD-III-2011.pdf

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información*. Buenos Aires, Argentina: Lumen.

Argentina. Consejo Federal de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Básico Educación Secundaria*. Buenos Aires: Autor. https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-basico

Argentina. Consejo Federal de Educación (2012). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Campo de Formación General. Ciclo Orientado Educación Secundaria*. Buenos Aires: Autor. https://www.educ.ar/recursos/132578/nap-matematica-educacion-secundaria-ciclo-orientado

Atiyah, M. (1977). Trends in Pure Mathematics. *Proceedings of the 3rd International Congress on Mathematical Education*, 71-74.

Ball, D. (1999). Crossing Boundaries to Examine the Mathematics Entailed in Elementary Teaching. *American Mathematical Society*, *243*, 15-36.

Ball, D. (2017). Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. En G. Kaiser (Ed.). *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp.11-34). Hamburgo, Alemania: Springer. https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-62597-3

Ball, D. y Bass, H. (2003). Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, *26*, 3-14. https://eric.ed.gov/?id=ED529557

Ball, D., Hill, H. y Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, *29*(3), 14-46. http://hdl.handle.net/2027.42/65072

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Blanco, L. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Relime*, *6*(2), 107-132. http://www.relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-9-1/460-volumen-6

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación. http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL002541.pdf

Carreño, E. y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, *14*(1), 23-53. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.9265

Chapman, O. (2015). Understanding and supporting mathematics teachers' knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 101-103. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9298-7

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analítica para futuros profesores. Un estudio de caso desde el MKT. *Educación Matemática*, *29*(1), 141-170. http://dx.doi.org/10.24844/em2901.06

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2019). Las preguntas generatriz en la construcción del conocimiento para la enseñanza de la geometría analítica. En J. Aguirre, L. Proasi y C. De Laurentis (Comps.). *Actas del Congreso Latinoamericano "Prácticas, problemáticas y desafíos contemporáneos de la Universidad y del Nivel Superior"* (pp.2025-2033). Mar del Plata, Argentina: Universidad Nacional de Mar del Plata. https://drive.google.com/file/d/1pw2-oBRqEHf4iEF5gqjRs7GvQaPmAixF/view

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. y Rochera, M. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de mecanismos de influencia educativa. *Infancia y Aprendizaje, Journal for the study of Education and Development*, *59-60*, 189-232. https://doi.org/10.1080/02103702.1992.10822356

Corica, A.R. y Marín, E. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. *Números*, *85*, 91-114. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_06.pdf

Crescenti, E. (2008). A formação inicial do professor de matemática: aprendizajem da Geometria e actuação docente. *Práxis Educativa*, *3*(1), 81-94. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.3i1081094

Dallemole, J., Oliveira, C. y Moreno, L. (2014). Registros de representación semiótica y geometría analítica: una experiencia con futuros profesores. *Relime*, *17*(2), 131-163. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1721

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, *10*(1), 1-24. http://hdl.handle.net/10481/37188

De Villiers, M. (1997). The future of secondary school geometry. *Pythagoras. Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, *44*(2), 37-54.

Espinoza-Vazquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de analogía en la enseñanza del concepto de función. *Relime*, *21*(3), 301-324. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Gaita-Iparraguirre, R.C. (2015). *El paso de la geometría sintética a la geometría analítica* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid. https://doi.org/10.35376/10324/10135

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, *39*, 13-25. https://revistasuma.es/IMG/pdf/39/013-025.pdf

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*, *44*, 25-34. https://revistasuma.es/IMG/pdf/44/025-034.pdf

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31. https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/27/25

González Urbaneja, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma*, *30*, 205-236. http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/18_raices.pdf

Hernández Gutiérrez, F. y Lizarde Flores, E. (2015). El conocimiento especializado del docente de matemáticas. *Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *6*(11), 36-44. https://www.rediech.org/ojs/2017/index.php/ie_rie_rediech/article/view/159/257

Henríquez, C. y Montoya, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 51-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1408

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación* (5ª Ed.). Ciudad de México, México: Mc Graw Hill.

Hill, H. y Ball, D. (2004). Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(5), 330-351. https://doi.org/10.2307/30034819

Hill, H., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511. https://doi.org/10.1080/07370000802177235

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Students Achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *20*(3), 109-114. https://eprints.soton.ac.uk/41293

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.). *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp.121-139). Londres, Reino Unido: Routledge Falmer. https://doi.org/10.4324/9780203165874

Jones, K., Fujita, T. y Ding, L. (2006). Informing the pedagogy for geometry: learning from teaching approaches in China and Japan. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *26*(2), 110-114. http://eprints.soton.ac.uk/41852

Marradi, A., Archenti, N. y Piovani, J. (2007). *Metodología de las Ciencias Sociales*. Buenos Aires, Argentina: Emecé.

Martín, M. (2014). Formación del profesorado en la era postmoderna: una perspectiva narrativa. *Revista de Educación*, *5*(7), 75-92. https://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ/article/view/982/1023

Moreira M. A. (2009). *Subsidios Metodológicos para el Profesor Investigador en Enseñanza de las Ciencias*. Porto Alegre, Brasil: Universidad Federal de Río Grande do Sul. http://moreira.if.ufrgs.br/Subsidios12.pdf

Muñoz Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *18*(3), 1801-1817. http://hdl.handle.net/11441/51501

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Principios y Normas para la Matemática escolar*. Lisboa Portugal: Asociación de Profesores de Matemática.

Ortega, E. (2013). Las raíces euclidianas de la geometría analítica cartesiana. Una perspectiva históricoepistemológica. En P. Perry (Ed.). *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp.117-126). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. http://funes.uniandes.edu.co/3720/1/OrtegaLasra%C3%ADcesGeometria2013.pdf

Pinto-Leivas, J.C. (2011). *Geometrización del curriculum en la formación del Profesorado de Matemáticas.* En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, J. Lorenzo y M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp.481-490). Ciudad Real, España: SEIEM. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3731319

Planas, N., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(1), 45-60. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2240

Ponte, J.P. (2014). Mathematics teacher education as a multifaceted field of study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(6), 489-490. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9291-6

Ponte, J.P., Matos, J.M., y Abrantes, P. (1998). *Investigación en Educación Matemática: Implicaciones curriculares*. Lisboa, Portugal: Instituto de Inovação Educacional.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (4), 47- 64. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i4.74

Regner, M. y Rodríguez, M. (2016). El fenómeno de la desarticulación entre los enfoques sintético y analítico en elipses: un estudio de caso. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *11*(2), 16-27. http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/10079/9108

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.). *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp.273-298). Rotterdam, Holanda: Sense.

Santaló, L. (1999). La formación de profesores de matemática para la enseñanza media. En L. Santaló, C. Ottolenghi, H. Tricarico, I. Hernaiz, P. Marbach, M. Chouy Aguirre, E. García, M. Marmorato, B. Greco, G. Gómez, G. Galagovsky Kurman, T. Cetkovich y P. Fauring. *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática* (pp.209-214). Buenos Aires, Argentina: Troquel.

Saorín-Villa, A., Torregrosa-Gironés, G. y Quesada-Villela, H. (2019). Razonamiento configural y desarrollo del discurso en la resolución de problemas empíricos en contextos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(3), 89-109. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2431

Schaefer, L., y Sgreccia, N. (2018). Enseñanza de geometría sintética a futuros profesores. El caso de la Universidad Nacional de Rosario. *Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(2), 134-161. https://doi.org/10.4471/redimat.2018.2559

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching Mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education.* (pp.321-354). Rotterdam, Holanda: Sense.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática*, *24*(3), 33-66. http://somidem.com.mx/revista/vol24-3/

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado*, *9*(2), 1-30. https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf

Sosa, L. y Carrillo, J. (2010). *Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato*. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp.569-580). Lleida, España: SEIEM.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Taylan, R.D. y Ponte, J.P. (2016). Investigating pedagogical content knowledge-in-action. *Redimat*, *5*(3), 212-234. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2016.2227

Valencia, M.A. (1990). ¿Aprovechamos nuestros cursos de geometría analítica? *Educación Matemática*, *2*(2), 14-21. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/REM2-2/vol2-2-2.pdf

Vasco, D. y Climent, N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de álgebra lineal. *PNA*, *12*(3), 129-146. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6454

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105-123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Recepción: 18/05/2020 *Aceptación: 30/06/2020*