REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Hitos en la génesis y desarrollo de la Geometría Clásica

Emmanuel Colombo Rojas[1]

ecolombo@exa.unicen.edu.ar

[1]NYECYT, Universidad Nacional del Centro de la Prov de Bs. As. Paraje Arroyo Seco s/n , Tandil, Argentina.

Resumen

En este trabajo se realiza una síntesis de los orígenes de la Geometría Clásica a través del estudio de los hitos más representativos en el desarrollo de la Geometría Pre-helénica y Griega. El objetivo de éste análisis es el de remarcar los grandes cambios que se han dado a lo largo de la evolución histórica de la Geometría Clásica; cambios que han hecho de ésta geometría (y de la Matemática en su totalidad) un conjunto de estrategias, procedimientos y conocimientos que en general resultan ser totalmente diferentes a los que existían en los inicios de la Historia de la Matemática.

Palabras clave: Geometría Clásica, Geometría Pre-helénica, Geometría Griega.

Milestones in the genesis and development of Classical Geometry

Abstract

This paper presents a synthesis of the origins of the Classic Geometry across the study of the most representative milestones in the development of the Pre-Hellenic and Greek Geometry. The aim of this analysis is of stressing the big changes that have been given along the historical evolution of the Classic Geometry; changes that have done of this one geometry (and of the Mathematics in its entirety) a set of strategies, procedures and knowledge in general that turn out to be totally different from those who existed in the beginnings of the History of the Mathematics..

Keywords: Classical Geometry, Pre-Hellenic Geometry, Greek Geometry.

Jalons dans la genèse et le développement de la géométrie classique Titre

Résumé

Ce document résume les origines de la géométrie classique se fait à travers l'étude des monuments les plus représentatifs dans le développement de la géométrie pré-hellénique et grecque. L'objectif de cette analyse est de mettre en évidence les principaux changements qui ont eu lieu tout au long de l'évolution historique de la géométrie classique; changements qui ont fait cette géométrie (et des mathématiques dans son intégralité) un ensemble de stratégies, de procédures et de la connaissance en général se révèlent être complètement différente de celles qui existaient dans l'histoire des débuts des mathématiques.

Mots clés: Géométrie Classique, Géométrie Pré-helléniques, Géométrie Grecque.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas inician con problemas de contexto, fuertemente ligado al entorno y para resolver problemas concretos relativos a medidas. La Geometría, en sus múltiples facetas, es una de las áreas de la matemática con vínculos más estrechos con el mundo que experimentamos. Desde el momento en que el hombre se empieza a abocar a la tarea de representar mediante figuras diversos elementos de su entorno, se puede afirmar que se da inicio a las primeras geometrías.

Así, es razonable pensar que los orígenes de la geometría se encuentran en los mismos orígenes de la humanidad, pues seguramente el hombre primitivo clasificaba (aun de manera inconsciente) los objetos que le rodeaban según su forma. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento (informal e intuitivo) a la geometría.

Debió transcurrir mucho tiempo para que esta ciencia se convirtiese en un conocimiento sistematizado, riguroso e independiente del mundo concreto tal como lo conocemos hoy en día. Por otro lado, hay muchos aspectos de la Matemática actual que nosotros concebimos como parte

Recepción:19/05/2014 *Aceptación: 26/11/2014*

esencial de ésta y que, sin embargo, no siempre estuvieron presentes. Por ejemplo, en los pueblos de la antigüedad el cálculo de áreas y volúmenes se redujo a casos particulares, mientras que en la matemática moderna, estos cálculos corresponden a una función básica del cálculo integral. En el período antiguo no habían fórmulas generales ni mucho menos una demostración formal de ellas. La introducción de letras para representar valores variables es muy posterior a las primeras civilizaciones. Entonces, ¿Cuál fue el sentido que se le dio a la Geometría Clásica en sus orígenes?, esto es, ¿Qué llevó al hombre a estudiar geometría?

A continuación se inicia el estudio histórico de la gestación de la Geometría Clásica con algunas de las primeras civilizaciones humanas de las que se tiene cuenta.

2. Geometría Pre-helénica

Podría afirmarse que la Geometría Clásica tiene sus inicios antes de Euclides: con civilizaciones que se conocen como pre-helénicas (5000-500 a. C.). La labor de Euclides consistió ni más ni menos que en un análisis crítico y reflexivo de conocimientos previos integrándolos de manera organizada dentro de su obra como el primer sistema axiomático de la Historia de la Matemática (Klimovsky y Boido, 2005). Así, se ve la necesidad de iniciar esta sección con una descripción breve de las características de la geometría pre-helénica.

Es probable que la Matemática haya tenido su origen en los primeros asentamientos humanos como herramienta para solucionar problemas empíricos, esto es, problemas prácticos de la vida diaria. En este contexto, las figuras geométricas habrían tenido un papel fundamental siendo estudiadas junto con sistemas de conteo y operaciones básicas (Ibíd., 2005). Para alcanzar una mayor comprensión de la geometría de este período podemos tomar, a modo de ejemplo, la geometría egipcia.

La matemática egipcia gira en torno a la arquitectura. Los egipcios hallaron fórmulas para calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, y el volumen de paralepípedos rectos, cilindros, pirámides truncadas y pirámides completas (de esto último no hay registros pero es muy probable que lo hayan conocido pues el cálculo del volumen de una pirámide es un caso particular del cálculo del volumen de una pirámide truncada); todo siempre fuertemente vinculado a su entorno físico.

Un claro ejemplo de las características de la geometría egipcia se puede observar en el tratamiento de algunos triángulos rectángulos. Los egipcios tenían una especial atracción hacia los triángulos. Los anudadores egipcios hacían nudos igualmente espaciados que servían para medir. En la práctica, ellos observaron que usando las cuerdas para formar triángulos con ciertas medidas obtenían ángulos rectos.

Así, se podría afirmar que los egipcios tenían un cierto conocimiento del Teorema de Pitágoras. Sin embargo, no se sabe si conocían esta propiedad en general o si lo aplicaron a otros triángulos que no fuese un triángulo de catetos de medidas 4 y 3 e hipotenusa de medida 5. A pesar de esto, es gracias a esto que los egipcios fueron capaces de delimitar áreas con ángulos rectos, usados por ejemplo en la construcción de la base de las pirámides (Alcaraz, 2007). Sin embargo, el problema geométrico más complejo abordado por la civilización egipcia y del que haya quedado registro es el del cálculo del volumen de una pirámide truncada (Bell, 1949).

Pero antes de describir el procedimiento egipcio y, para darnos una dimensión de la diferencia con otros resultados del mismo período, podemos considerar la fórmula empleada por los babilonios. En tablillas de barro sumerias se pueden observar ejemplos de aplicación del cálculo del volumen de una pirámide truncada (Guasco y Crespo Crespo, 1998). Si lo expresamos en forma general en la notación algebraica actual sería la siguiente:

$$V = h.\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$$

donde *a* y *b* son los lados de las bases y *h* es la altura.

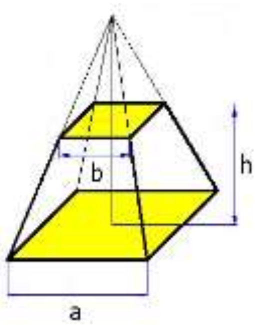

Figura 1: representación gráfica los elementos necesarios para volumen de una pirámide truncada.

Si la comparamos con la fórmula que actualmente se emplea para calcular el volumen de este cuerpo, esto es,

$$V = (a^2 + ab + b^2).\frac{h}{3}$$

se puede advertir que se trata de una expresión bastante compleja.

Respecto al procedimiento egipcio, en el papiro que hoy conocemos como *papiro de Moscú* (1780 a.C.), se encuentra un ejemplo de la aplicación de una fórmula actual para el cálculo del volumen de una pirámide truncada (García Cruz, 1988) en jeroglífico, una forma de escritura egipcia. No se conoce el nombre del autor. Sin embargo, aun sin ser más que un descubrimiento empírico de un proceso semejante o su equivalente verbal, es una prueba de ingenio extraordinario. Sin dudas, de haber escrito su nombre en el papiro, el autor pasaría a la historia de los grandes geómetras (Bell, 1949).

Se presenta a continuación la resolución del problema:

> *Si dices una pirámide truncada es de seis de altura, cuatro de base y dos en lo alto. Toma el cuadrado de cuatro que es dieciséis. Toma el doble de cuatro que es ocho. Toma el cuadrado de dos, resulta cuatro. Suma todo, el dieciséis, el ocho y el cuatro, resulta*

Recepción:19/05/2014 *Aceptación: 26/11/2014*

veintiocho. Toma un tercio de seis. Resulta dos. Toma veintiocho dos veces, resulta cincuenta y seis. Ved, es cincuenta y seis. Lo hallaste bien. (Guasco y Crespo Crespo, 1998, p. 17).

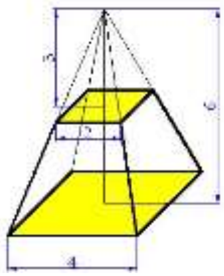

Figura 2: representación gráfica del problema egipcio sobre el cálculo del volumen de una pirámide truncada.

Si seguimos las instrucciones del papiro tenemos que:

$$V = (4^2 + 8 + 2^2).\frac{6}{3}$$
$$V = 28.\frac{6}{3}$$
$$V = 56$$

En general, podemos hacer la siguiente comparación:

Papiro de Moscú	Notación actual
Toma el cuadrado de cuatro que es dieciséis.	a^2
Toma el doble de cuatro que es ocho.	axb
Toma el cuadrado de dos, resulta cuatro.	b^2
Suma todo, el dieciséis, el ocho y el cuatro, resulta veintiocho.	a^2 + axb + b^2
Toma un tercio de seis. Resulta dos.	1/3 x h.
Toma veintiocho dos veces, resulta cincuenta y seis. Ved, es cincuenta y seis. Lo hallaste bien.	V=1/3 x h x (a^2 + axb + b^2)

Como se puede observar, a pesar de que la argumentación egipcia hace referencia a un caso particular, conserva procedimientos válidos para el cálculo de cualquier pirámide truncada de base cuadrada. El ejemplo de aplicación de los egipcios es exacto y su expresión resulta mucho más sencilla que la ofrecida por los babilonios. Para darnos cuenta de la magnitud de este logro basta con considerar cuanto tiempo debió transcurrir para que ésta fórmula fuese probada: se requirió de la teoría de límites y del cálculo integral para poder demostrarla recién en el año 1900 d. C (Bell, 1949).

Podemos preguntarnos respecto a este hito matemático ¿Cuál habría sido el disparador de estos desarrollos? A este respecto se puede hacer referencia a la construcción de las pirámides que, si bien tienen una forma piramidal, a lo largo de su construcción tuvieron forma de tronco de pirámide y los constructores bien pueden haber necesitado calcular la cantidad de material faltante y la que se utilizó en el proceso de construcción. Además, los egipcios construían obeliscos y muchas otras obras arquitectónicas con forma de pirámide truncada y, para su extracción, transporte y utilización era conveniente conocer su volumen.
Otra pregunta que se puede hacer frente a este logro geométrico es ¿Cómo arribaron a estos resultados? La respuesta pertenece probablemente a un ámbito empírico. No se puede afirmar con plena certeza cuál fue el método empleado pues no hay registros de los mecanismos empleados para arribar a los resultados matemáticos. Sólo se presenta la forma de proceder y la solución.

En el caso del cálculo del volumen de una pirámide truncada, se cree que los egipcios pueden haber dividido la estructura en otros cuerpos más fáciles de estudiar, o bien extrayendo a la pirámide total la pirámide que le restaba a la pirámide truncada. En éste último procedimiento les habría quedado un parámetro indeterminado. Ese parámetro posiblemente haya sido eliminado mediante un estudio de casos (Maza Gómez, 2002).

Otro ejemplo del “aplicacionismo” predominante en la matemática egipcia se encuentra probablemente en los instrumentos de forma triangular que eran empleados para asegurarse que se mantuviese el ángulo de inclinación de los lados de la pirámide permitiendo que converjan en un único vértice. Estos instrumentos se elaboraban de manera tal que formase un ángulo de 180° con el pie de la pirámide y se iba desplazando a lo largo de cada lado procurando mantener la horizontal (ibíd., 2002).

La inclinación de las caras de las pirámides se media con la se-get, que se define como la cantidad de palmos (7,47cm) horizontales por codo (52,29 cm) vertical. Sería el equivalente actual de la cotangente del ángulo. En el problema 56 del papiro de Rhind se ejemplifica el cálculo de la Se-get:

> *Ejemplo de cálculo en una pirámide. Ukha-thebt* [lado de la base] *es igual a 360 codos. Pir-em-us* [altura de la pirámide] *es igual a 250 codos. ¿Cuánto mide la se-get?* (García Cruz, 1988, p. 28).

El procedimiento empleado es el siguiente:

1. Calcula ½ de 360 que da 180.
2. Multiplica 250 hasta obtener 180, que da 1/2+1/5+1/50.
3. Un codo son 7 palmos. Multiplica ahora por 7 1/2+1/5+1/50 que da 5+1/25. Así, el se-get es 5+1/25 palmos por codo.

En la resolución del problema se trabaja con el triángulo conformado por la apotema de una cara, la altura de la pirámide y la distancia entre ellas. Éste último lado mide la mitad del lado de la base que, en este caso, es 180 codos como se indica en el primer paso del procedimiento. Luego, se suman fracciones de 250 hasta llegar a 180. La suma de estas fracciones es el cociente de los catetos del triángulo. Nótese que se trabaja con números enteros positivos y fracciones de la unidad que son los únicos números que se conocían y estudiaban. Por último, como la se-get se mide en palmos por codo y un codo equivale a siete palmos (7.7,47 cm = 52,29 cm), se procede a multiplicar el numerador por siete, lo que permite obtener el resultado final.

Cómo se puede observar, los resultados eran obtenidos generalmente a través de medios prácticos. Consecuentemente, no había una precisión ni demostraciones matemáticas ni una búsqueda de sencillez procedimental ni fórmulas generalizadas de los progresos en geometría; de hecho, muchas veces incluso los ejemplos de aplicación no otorgaban más que resultados aproximados. Sin embargo, estos procedimientos, a los fines para los que se requerían, proporcionaban datos bastante satisfactorios.

3. Geometría Pre-helénica y Geometría Griega

Dentro de la civilización griega (700-350 a. C.) y, posteriormente, de la civilización alejandrina (400-200 a. C.); se puede observar un cierto incremento en el nivel de rigurosidad y exigencias sobre el conocimiento. Ya no bastaba con que una fórmula proporcionase resultados empíricos aceptables u óptimos, se requería una justificación y demostración de la misma. Empezaba a despertarse un interés por la Matemática por sí misma más que por sus usos. Se buscaba, de alguna manera, develar verdades matemáticas que sirviesen a modo de base a partir de los cual se justificarían todos sus conocimientos.

De la Antigua Grecia podemos tomar de ejemplo a la producción de Pitágoras de Samos (571-495 a. C.) y su secta. Ellos tenían conocimiento del Teorema de Pitágoras en general, esto es, si bien no había expresiones del Álgebra Simbólica existía la idea de que la propiedad era válida para cualquier triángulo rectángulo. Realizan también una de las primeras demostraciones de las que se tienen registro: la existencia de cantidades que no pueden ser expresadas como cocientes de números enteros positivos.

Por parte de la matemática alejandrina, Euclides (siglo III a. C.), al recoger los conocimientos de civilizaciones pre-helénicas, los trata con una fundamentación propia de la Matemática Griega. Por un lado, se distanció de la particularidad del empirismo preponderante en la Matemática Pre-helénica: se buscaron los ideales, lo absoluto, lo general. Fue privilegiada la búsqueda de la esencia aristotélica o el universal socrático por encima de la casuística. En toda la obra de *los Elementos* de Euclides no hay una sola referencia a casos concretos del mundo real. En este sentido se puede percibir un carácter crítico y reflexivo de Euclides por sobre sus predecesores egipcios.

Por otro lado, Euclides adopta la axiomática propuesta por Aristóteles como instrumento organizador y justificativo de gran parte del conocimiento de geometría existente hasta su época. Aristóteles (siglo IV a. C.), previamente a la época de Euclides, había planteado lo que se conoce como “noción de sentido común” de ciencia, según los cuales la ciencia debe hacer referencia a algún aspecto de la realidad mediante enunciados verdaderos íntimamente vinculados entre sí (Boido, 2007). La sistematicidad de este planteo está provista por la lógica que asegura la preservación de la verdad en los razonamientos al pasarse de las premisas a la conclusión. Por otro lado, para evitar la recursividad en la búsqueda de una justificación de la veracidad de los enunciados se recurre a los axiomas, esto es, enunciados que se admiten como verdaderos sin necesidad de ser demostrados. El resto de los enunciados se conocen como teoremas y deben ser demostrados a partir de los axiomas.

En la obra *Los Elementos* de Euclides; las definiciones, los postulados y las nociones comunes (axiomas para él) se corresponden, con ciertas matizaciones, a los “puntos de partida” aristotélicos (Klimovsky y Boido, 2005). Muchos de los conocimientos presentes en civilizaciones pre-helénicas son presentados aquí a modo de proposiciones que serán demostradas a partir de los axiomas.

De esta manera, los conocimientos egipcios y babilónicos encuentran su expresión universal y axiomática dentro de la geometría griega y alejandrina y, especialmente, en *Los Elementos* de Euclides; obra que, sin duda alguna, se trata de una de las mejores obras de las matemáticas de la antigüedad que fue referente para todos los geómetras que le sucedieron hasta la época de Hilbert y la modernización del sistema axiomático euclidiano en el año 1899.

CONCLUSIONES

Aunque parezca poco si se compara con la Matemática actual, las herramientas geométricas utilizadas por la humanidad en la antigüedad constituyen una base importante para la constitución de una geometría más rigurosa como es el caso de la Geometría Clásica. No se pueden hacer generalizaciones si no se tiene conocimiento de lo particular y, al mismo tiempo, es necesario conocer posibles aplicaciones para que cobren significancia las generalizaciones. En el camino de la abstracción, la Matemática puede llegar a perder su razón de ser, pareciéndose más a un mero juego intelectual. Sin embargo, la obra de los egipcios nos recuerda su origen y su sentido: los constructos matemáticos emergen para resolver problemas que nos asedian en nuestra vida cotidiana, sirven para comprender nuestro entorno.

La obra de Euclides marcó un hito en la Matemática que perduraría por siglos. Pero, sin haber tenido tanto reconocimiento, otras civilizaciones anteriores a los griegos como los babilonios y los egipcios, fueron responsables de realizar las primeras aproximaciones a la Matemática actual desde lo concreto. Entonces, es interesante preguntarse por ¿Qué aspectos de la Geometría Clásica podrían haberse desarrollado sin tener estos importantes antecedentes? ¿Es posible estudiar matemática sin hacer referencia a sus orígenes?

REFERENCIAS

Alcaraz, A. B. (2007). Matemáticas en el Antiguo Egipto. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea: Departamento de Didáctica de la Matemática y de las CC. Experimentales, Escuela Universitaria de Magisterio. Disponible en: http://www.ehu.eus/aba/div/paseo-06-07.pdf.

Bell, E. T. (1949). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Boido, G. (2007). *Realidad, verdad y lógica en matemática*. Conferencia presentada en el 1° Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. Tandil, Argentina.

De la Torre (2006). *El método cartesiano y la geometría analítica*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 8 (1), pp. 1-13. Disponible en: http://revistaerm.univalle.edu.co/otros/adtorre.pdf.

García Cruz, J. A. (1988). Geometría egipcia (y II). *Revista Números*, 17, pp. 27-34.

González Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Revista Sigma*, 30, pp. 205-236.

Guasco, M. J. y Crespo Crespo, C. (1996). *Geometría: su enseñanza* (1[a] ed.) Buenos Aires: Conicet.

Hernández, V. M. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿Y Apolonio? *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1 (1), pp. 32-45.

Klimovsky, G. y Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático* (1[a] ed.) Buenos Aires: AZ editora.

Maza Gómez, C. (2002). *Matemáticas en la Antigüedad.* Universidad de Sevilla, sitio acreditado para curso 2007/08. Disponible en: http://personal.us.es/cmaza/index.html.

Piaget, J. y García, R. (1983) *Psychogénése et histoire des sciences*. París: Flammarion.

Recepción:19/05/2014 *Aceptación: 26/11/2014*